

# DISTRIBUTIONS GRANULOMÉTRIQUES DE RÉFÉRENCE APPLIQUÉES AUX PRO- BLÈMES ÉNERGÉTIQUES DU BROYAGE

**Mobamed KECIR**

*Ingénieur civil des Mines - Docteur en Sciences Appliquées.*

*Service d'Exploitation des Mines de l'Université libre de Bruxelles.*

## ***I. Introduction***

L'estimation de l'énergie nécessaire au broyage est un des grands problèmes du monde industriel et a fait l'objet de très nombreuses recherches. Rappelons que le rendement énergétique des engins de fragmentation varierait, selon les sources, de 0,5 à 5%.

Cette imprécision résulte de la méconnaissance des phénomènes intervenant lors de la fragmentation et il n'est dès lors pas étonnant qu'il n'existe pas encore de lois ou de formules décrivant son mécanisme. Ceci oblige les spécialistes de l'énergétique du broyage à faire appel à des formules empiriques, que l'on appelle, un peu abusivement, les théories classiques du broyage.

Notre contribution consiste à démontrer que l'usage des principales distributions granulométriques de référence permet l'utilisation aisée des formules énergétiques. Par la même occasion nous mettrons en évidence certains cas d'incompatibilité .

## II. Les théories classiques du broyage

Trois théories ont été principalement avancées :

La première date de 1857 et émane de Rittinger selon lequel l'énergie utile  $E_u$  nécessaire pour fragmenter une unité de poids de matière est proportionnelle à l'augmentation de sa surface, soit  $E_u = \lambda(S_f - S_i)$  où  $S$  est la surface spécifique et où les indices  $i$  et  $f$  spécifient respectivement l'état initial et final.

En admettant qu'un grain de dimension  $D$  a une surface  $s = k_2 D^2$ , on peut écrire, d'après Rittinger, que son énergie de surface est  $e = \lambda s = \lambda k_2 D^2$ .

Dans une tranche infinitésimale  $D-D+dD$  contenant un nombre  $dN$  de grains, l'énergie serait donc égale à  $dE = \lambda k_2 D^2 dN$ .

Le poids  $dP$  des particules contenues dans cette tranche étant lié à leur nombre  $dN$  par la relation stochastique  $dP = k_1 \rho g D^3 dN$ , on obtient

$$dE = \lambda k_2 D^2 \frac{dP}{k_1 \rho g D^3} = \Lambda \frac{dP}{D} \quad \text{et finalement}$$

$$E_u = \Lambda \left[ \int_0^{\infty} \frac{dP_f}{D} - \int_0^{\infty} \frac{dP_i}{D} \right] = \Lambda \left[ \frac{1}{H_{pf}} - \frac{1}{H_{pi}} \right] \quad (1)$$

où  $dP_f$  et  $dP_i$  sont respectivement les distributions granulométriques pondérales finale et initiale et  $H_{pf}$  et  $H_{pi}$  les moyennes pondérales harmoniques de ces répartitions.

La deuxième théorie est celle de Kick (1887) selon lequel l'énergie utile nécessaire pour broyer un matériau donné ne dépend que du rapport de réduction.

En suivant le même processus que précédemment, l'énergie associée au matériau sera égale à

$$E_u = A \int_0^{\infty} \lg \frac{B}{D} dP_f - A \int_0^{\infty} \lg \frac{B}{D} dP_i = A \lg \frac{G_{p_i}}{G_{p_f}} \quad (2)$$

où  $G_{p_i}$  et  $G_{p_f}$  sont les moyennes pondérales géométriques (initiale et finale) et  $A$  et  $B$  des constantes.

La troisième loi est de Bond et devient à peu près définitive vers 1952. Bond, après de longs tâtonnements, a émis l'hypothèse que l'énergie nécessaire au broyage est en réalité plus importante que la loi de Rittinger ne l'indique. Il estime que cette énergie est proportionnelle à  $D^{2,5}$ , soit  $e = kD^{2,5}$  et il envisage l'énergie totale consommée qui, par un raisonnement analogue, s'écrit

$$E_t = K \left[ \int_0^{\infty} \frac{dP_f}{\sqrt{D}} - \int_0^{\infty} \frac{dP_i}{\sqrt{D}} \right] \quad (3)$$

Une grandeur très importante qui a été introduite par Bond est le Work Index : c'est l'énergie par unité de poids nécessaire pour réduire un poids unitaire de matière d'une dimension initiale  $D_i = \infty$  à une dimension finale  $D_f = 1$  mm.

Comme  $W_i$  est donc =  $K$ , la relation (3) peut s'écrire :

$$E_t = W_i \left[ \int_0^{\infty} \frac{dP_f}{\sqrt{D}} - \int_0^{\infty} \frac{dP_i}{\sqrt{D}} \right] = W_i \left[ \frac{1}{\sqrt{X_f}} - \frac{1}{\sqrt{X_i}} \right] \quad (4)$$

où  $X_f$  et  $X_i$  sont les moyennes (finale et initiale) dans le sens de Bond, définies par les intégrales figurant dans les formules (3) et (4). La formule de Bond est la seule utilisée en pratique car on dispose de tables indiquant le Work Index de nombreux matériaux.

Quelle que soit la théorie adoptée, on constate qu'elle nécessite des intégrations parfois longues à effectuer, ce qui justifie, par exemple, l'assimilation par Bond de la moyenne  $\chi$  à la dimension  $D_{80}$ , c'est à dire au 8<sup>e</sup> décile de la distribution correspondante.

### III. Usage des principales distributions granulométriques pour le calcul de l'énergie nécessaire au broyage.

Les techniciens de la granulométrie assimilent souvent les distributions granulométriques à des formes canoniques parmi lesquelles les plus utilisées sont la loi de Gaudin - Schuhmann, de Rosin-Rammler et la distribution logarithmico-normale; ces distributions de référence ont l'avantage de pouvoir être anamorphosées en des droites.

Cette recherche a permis de constater un certain nombre d'incompatibilités non signalées jusqu'à présent par la littérature et qui seront explicitées dans les conclusions.

#### III. 1 La distribution de Gaudin-Schubmann

Cette répartition, utilisée principalement aux Etats-Unis, est définie par l'équation

$$P(D) = \left[ \frac{D}{D_0} \right]^n \quad (5)$$

où  $D_0$  représente le plus gros grain et  $n$  la pente de la droite (figure 1).

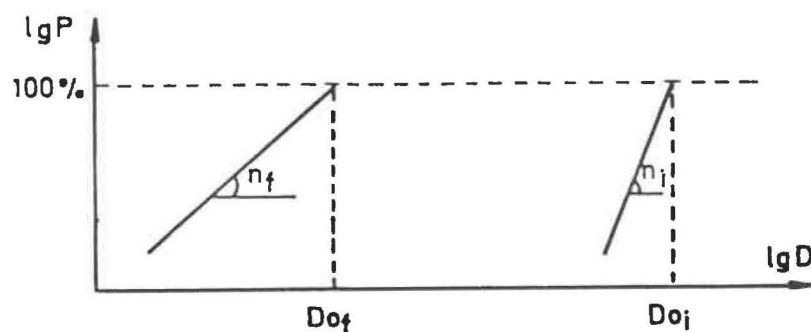


Figure 1.- Anamorphose selon la loi de Gaudin-Schubmann

Si l'on effectue le changement de variable  $x = \frac{D}{D_o}$ , on trouve  $P(x) = x^n$  et  $dP(x) = n x^{n-1} dx$ .

En remplaçant cette dernière valeur dans chacune des trois formules donnant l'énergie utile, on obtient successivement :

- dans la loi de Rittinger, chacun des termes de l'équation (1) vaudra

$$\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{D_o x} = \frac{n}{D_o} \int_0^1 x^{n-2} dx$$

. Si  $n_f, n_i \neq 1$ , on aura finalement

$$E_u = A \left[ \frac{n_f}{D_{of}} \cdot \frac{1}{n_{f-1}} - \frac{n_i}{D_{oi}} \cdot \frac{1}{n_{i-1}} \right] \quad (6)$$

. Si  $n = 1$ , le terme correspondant vaudra  $\frac{1}{D_o} \int_0^1 x^{-1} dx = \frac{1}{D_o} [\lg x]_0^1$

La valeur  $n = 1$  donc est incompatible avec Rittinger.

-Si dans la formule (2) de Kick on introduit la distribution de Gaudin-Schuhmann, chacun des termes vaudra

$$\int_0^1 \lg \frac{B}{D_{ox}} nx^{n-1} dx = n \lg \frac{B}{D_o} \int_0^1 x^{n-1} dx - n \int_0^1 \lg x \cdot x^{n-1} dx = \left\{ x^n \left[ \lg \frac{B}{D_o} - \lg x + \frac{1}{n} \right] \right\}_0^1$$

et on obtient finalement  $E_u = A \left[ \lg \frac{D_{oi}}{D_{of}} + \frac{1}{n_f} - \frac{1}{n_i} \right] \quad (7)$

Avec cette même substitution dans la formule (4) de Bond , chacun des termes vaudra

$$\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{D_o}x^{1/2}} dx = \frac{n}{\sqrt{D_o}} \int_0^1 x^{n-3/2} dx$$

$$\cdot \text{ Si } n \neq 0,5, E_t = W_I \left[ \frac{n_f}{\sqrt{D_{of}}} \cdot \frac{1}{n_f^{-1/2}} - \frac{n_i}{\sqrt{D_{oi}}} \cdot \frac{1}{n_i^{-1/2}} \right] \quad (8)$$

$$\cdot \text{ Si } n = 0,5, E_t = 0,5 W_I \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{D_{of}}} - \frac{1}{\sqrt{D_{oi}}} \right) \left[ \lg x \right]_0^1 \right\}$$

La valeur  $n=0,5$  donc est incompatible avec Bond.

Notons enfin que pour  $n = 1,5$ , l'équation (8) se réduit à

$$E_t = 1,5 W_I \left( \frac{1}{\sqrt{D_{of}}} - \frac{1}{\sqrt{D_{oi}}} \right)$$

Connaissant la constante énergétique  $\Lambda$  , A ou  $W_I$  du matériau considéré et en mesurant sur le diagramme de la figure 1 les valeurs de  $D_o$  et de  $n$ , on a immédiatement l'énergie utile (ou totale).

### III.2 La loi logarithmico-normale

Cette distribution, recommandée en France, est définie par l'expression

$$P(D) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^D e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\lg \frac{D}{G})^2} \frac{dD}{D} \quad (9)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type logarithmique et  $G$  la moyenne géométrique.

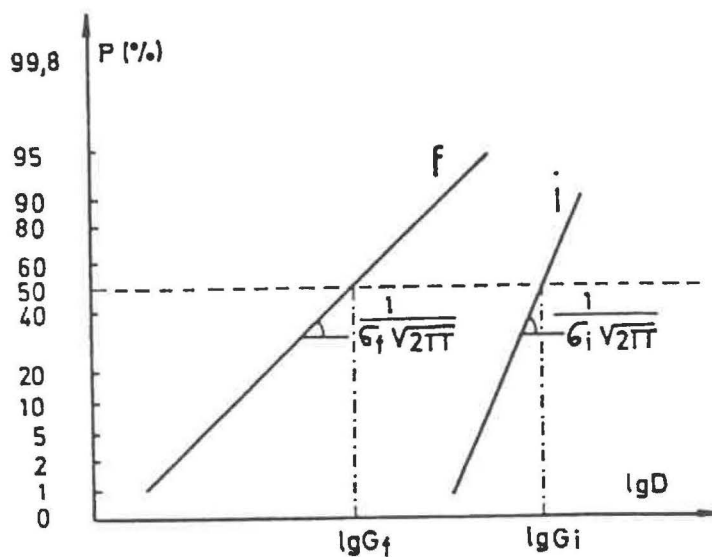


Figure 2.- Anamorphose selon la loi log-normale

Par le changement de variable  $t = \frac{1}{\sigma} \lg \frac{D}{G}$ , on est ramené à une loi normale réduite

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (10)$$

Dans l'équation de Rittinger, en remplaçant  $dP$  par (9), chacun des termes vaudra

$$\int_0^{\infty} \frac{dP}{D} = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 - \sigma t} dt = \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{G}$$

et l'énergie utile sera donc égale à

$$Eu = \left( \frac{e^{\frac{\sigma_f^2}{2}}}{G_f} - \frac{e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}}{G_i} \right) \quad (11)$$

Si dans la formule de Kick on fait la même substitution, chacun des termes vaudra

$$\int_0^{\infty} \lg \frac{B}{G e^{\sigma t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \lg \frac{B}{G} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \sigma \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right]$$

Comme la moyenne de la loi normale réduite est nulle, nous aurons donc:

$$Eu = A \lg \frac{B}{G_f} - A \lg \frac{B}{G_i} = A \lg \frac{G_i}{G_f} \quad (12)$$

Enfin, dans la formule de Bond, chacun des termes vaut

$$\int_0^{\infty} \frac{dP}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{G \cdot e^{\sigma t}}} dt = \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{G}}$$



et on a finalement l'énergie totale

$$Et = W_I \left( \frac{e^{\frac{\sigma_f^2}{2}}}{\sqrt{G_f}} - \frac{e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}}{\sqrt{G_i}} \right) \quad (13)$$

Nous constatons que si l'on adopte la loi logarithmico-normale, les trois théories énergétiques conduisent à des formules faisant également intervenir le coefficient angulaire de la droite et la moyenne géométrique G, directement lisibles sur les graphiques anamorphosés ( cf. figure 2).

### III. 3 La loi de Rosin-Rammler

Elle est normalisée en Allemagne et définie par l'expression

$$P(D) = 1 - e^{-\left(\frac{D}{D_o}\right)^n} \quad (14)$$

C'est une distribution gamma que les statisticiens appellent de Weibul.

Le changement de variable  $\frac{D}{D_o} = x^{\frac{1}{n}}$  donne

$$d\left(\frac{D}{D_o}\right) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} dx \quad \text{et} \quad dP(x) = e^{-x} dx$$

et conduit à des expressions dans lesquelles, outre les caractéristiques granulométriques directement lisibles sur les graphiques (cf. figure 3), intervient la fonction gamma que l'on peut trouver dans les tables.

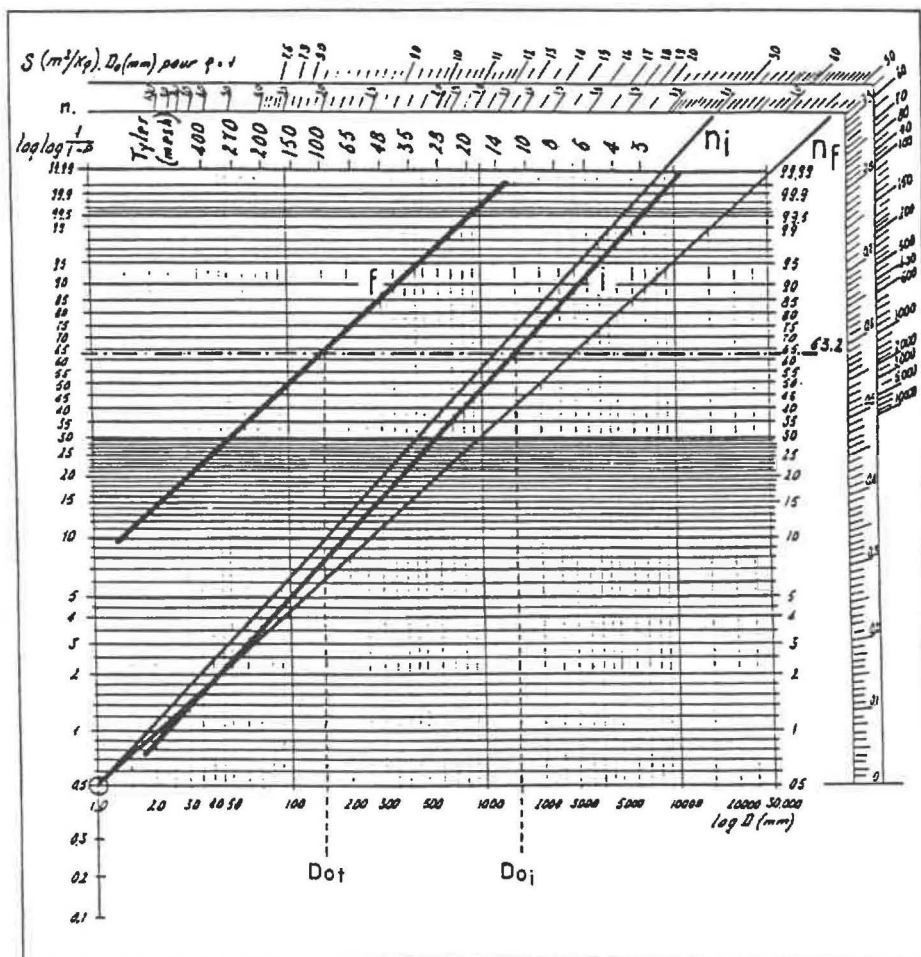


Figure 3.- Anamorphose selon la loi de Rosin-Rammler.

En introduisant la loi de Rosin-Rammler dans l'équation de Rittinger, chacun des termes vaudra

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{D_0 x^n} dx = \frac{1}{D_0} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{D_0} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et l'énergie utile sera calculée par

$$Eu = \Lambda \left[ \frac{1}{D_{of}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n_f}\right) - \frac{1}{D_{oi}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \right] \quad (15)$$

. Si  $n = 0,5$ , valeur peu probable en broyage mais possible,  $\Gamma(-1) = \infty$  ;  $n = 0,5$  est donc incompatible avec l'hypothèse de Rittinger.

Si l'on introduit la distribution de Rosin-Rammler dans la formule de Kick, chacun des termes vaudra

$$\begin{aligned} A \int_0^{\infty} \lg \frac{B}{D_o x^n} e^{-x} dx &= A \left[ \int_0^{\infty} \lg \frac{B}{D_o} e^{-x} dx + \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{n}} e^{-x} dx \right] \\ &= A \lg \frac{B}{D_o} \end{aligned}$$

et finalement

$$Eu = A \lg \frac{B}{D_{of}} - A \lg \frac{B}{D_{oi}} = A \lg \frac{D_{oi}}{D_{of}} \quad (16)$$

Dans la formule de Bond, chacun des termes vaudra

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{D_o x^n}} dx = \frac{1}{\sqrt{D_o}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{-\frac{1}{2n}} dx = \frac{1}{\sqrt{D_o}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

et l'énergie totale vaudra donc

$$Et = W_I \left[ \frac{1}{\sqrt{D_{of}}} \Gamma \left( 1 - \frac{1}{2n_f} \right) - \frac{1}{\sqrt{D_{oi}}} \Gamma \left( 1 - \frac{1}{2n_i} \right) \right] \quad (17)$$

**Remarque :** la valeur  $n = 0,25$ , incompatible avec la loi de Bond, ne se rencontre, à notre connaissance, jamais en pratique.

#### IV. Conclusions

Les théories classiques du broyage (Rittinger, Kick et Bond) conduisent à des formules donnant l'énergie utile (ou totale dans le cas de Bond) dans lesquelles figurent des intégrales longues à estimer.

L'usage des principales distributions granulométriques (Gaudin-Schuhmann, log-normale et Rosin-Rammler) a conduit à des relations simplifiées où, connaissant la constante énergétique du matériau à fractionner et en mesurant sur les diagrammes anamorphosés en droite (cf. figures 1, 2 et 3) les caractéristiques granulométriques (dimension  $D_0$ , coefficient angulaire  $n$ , moyenne géométrique  $G$ ), on a immédiatement l'énergie utile (totale).

Toutefois, l'usage courant des formules simples établies dans cette étude se heurterait aux valeurs, pas nécessairement compatibles, des constantes énergétiques connues; l'estimation courante des valeurs du  $W_I$  en fonction du  $D_{80}$  est l'exemple le plus caractéristique.

Nous avons également constaté des cas d'incompatibilité entre la valeur  $n$  des distributions granulométriques et certaines formules énergétiques, non signalés, à notre connaissance, jusqu'à présent.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] **BLANC , E.C.** : Technologie des appareils de fragmentation et de classement dimensionnel, tome 1, Ed. Eyrolles, Paris, 1974, pg. 1-25.
- [2] **BLAZY, P.** : La valorisation des minerais - P.U.F. Paris 1970, pg.21-58.
- [3] **CADLE, R.D.** : Particle size - , Theory and Industrial Applications, Reinhold Publ. Corp., N-York, 1965, pg. 1-42.
- [4] **KECIR, M.** : L'usage des principales distributions granulométriques de référence permet l'utilisation aisée des trois théories classiques de l'énergie nécessaire au broyage - Thèse annexe à la thèse de doctorat, Fac. Sc.Appl., U.L.B. Bruxelles, déc. 1992.
- [5] **LOWRISON , G.C.** : Crushing and grinding - The size reduction of solid materials, Butterworths, London, 1974, pg. 1-10, 49-66.
- [6] **PANOU. G.** : Minerais et préparation des minerais - Notes de cours (non publiées) , ULB, Fac.Sc.Appl., Bruxelles 1992.