Application de la recherche opérationnelle à une étude de maximalisation de recette

J. GODFROID,

Ingénieur civil des Mines,
Directeur commercial de la S. A. des Charbonnages du Borinage.

INTRODUCTION

L'auteur s'est initié à la recherche opérationnelle de plus en plus utilisée dans différents secteurs de l'économie, à l'occasion d'études postuniversitaires à la Faculté Polytechnique de Mons en liaison avec le département « Sciences et Techniques de la Gestion Industrielle ».

La théorie du programme linéaire est particulièrement adaptable à la solution de problèmes pratiques de l'industrie.

La présente étude montre comment une méthode de programmation linéaire, l'algorithme du Simplexe, a pu être utilisée pour résoudre un problème d'optimisation, à savoir la maximalisation de la recette qu'un charbonnage peut retirer de ses fournitures à une centrale électrique.

Un charbonnage qui alimente en combustible une centrale thermique dispose de différentes sortes de produits dont les prix sont fixés de commun accord par application d'une formule conventionnelle. Les prix calculés suivant cette formule diffèrent de ceux que l'on obtiendrait par application du barème officiel (Barème Cobechar) et cette différence varie en fonction des caractéristiques du produit fourni (sorte, % en cendres et en eau) et du coût de son transport à la Centrale.

Dans le tableau I, nous avons dressé un inventaire des sortes de charbons disponibles pour la centrale avec leurs caractéristiques (% en cendres et en eau, % en matières volatiles, pouvoir calorifique inférieur, tonnage mensuel produit) ; pour chaque sorte, nous avons calculé la valeur de la tonne au barème « conventionnel » et sa valeur au barème « officiel » et nous en avons déduit la grandeur de la différence en faveur de la valorisation au barème « conventionnel ».

Le but de cette étude sera donc la recherche du profit maximum que le Charbonnage peut retirer de ses fournitures à la Centrale, celles-ci devant, bien entendu, satisfaire aux contraintes imposées par cette Centrale.

Le profit maximum sera obtenu en maximalisant la différence en faveur de la valorisation au barème « conventionnel » par rapport au barème « officiel ».

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

a) La fonction économique à maximaliser peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Z = \sum_{i=1}^{i=10} x_i \cdot R_i .$$

x_i = variables à calculer constituées par les différentes sortes de charbon disponibles.

R_i = différence, rapportée à la tonne, en faveur de la valorisation « conventionnelle » pour chacune des sortes considérées.

b) La solution optimale à rechercher doit satisfaire aux contraintes suivantes :

1°) contraintes de disponibilité :

$$x_i \leqslant A_i .$$

A_i = tonnage mensuel disponible dans chaque sorte.

2°) contrainte de demande :

$$\Sigma_i x_i \cdot p_i = B.$$

B étant le nombre de Gcal (10^6, cal) demandées mensuellement par la Centrale

$$B \cong 151.000 \text{ Gcal}$$

3°) contraintes techniques :

le % en eau du mélange fourni ne doit pas dépasser H %, c'est-à-dire

$$\Sigma_i h_i \cdot x_i \leqslant H \Sigma_i x_i$$

TABLEAU I.

Sièges		Sortes x_i	Tonnage mensuel en t A_i	% en cendres C_i	% en eau h_i	% en M.V. $(m.v.)_i$	P.C.I. en 10^6 kcal/t P_i	Valeur à la t barème convent. à 7,25 % V_i F/t	Coût du transport à la t T_i F/t	Valeur nette à la t barème convent. $V_i - T_i$ F/t	Valeur ramenée au % eau réel h_i $(V_i - T_i)h_i$ F/t	Valeur à la t au barème officiel $(V_{CBC})_i$ F/t	Différence en faveur valorisation convent. F/t $(V_i - T_i)h_i - (V_{CBC})_i = R_i$
I	1	Schlamm axe	6.000	32,2	23,1	22,0	3.9	456,27	24	432,27	358.40	308,40	+ 50,0
	1'	Schlamm fer							39	417,27	345.40	308,40	+ 37,0
	2	Poussier axe	5.000	32,3	3,6	22,0	5,0	455.43	24	431.43	448,40	449.40	— 1,0
	2'	Poussier fer							39	416,43	432,40	449.40	— 17,0
	3	Mixtes axe	2.000	44,1	11,3	18,0	3.7	363.79	24	339.79	324,90	283.30	+ 41,0
II	4	Schlamm axe	1.000	33.5	23,8	16,0	3.9	446,51	12	434.51	356.51	295.50	+ 61,0
	5	Poussier axe	3.300	22,7	3,8	16,5	6,0	554.50	12	542,50	562,60	562,60	± 0
	6	Mixtes axe	1.000	41.3	11,0	16,0	4,0	385.34	12	373.34	358,80	315,00	+ 43,0
III	7	Schlamm axe	6.000	39,0	23.5	14,0	3.7	492,25	10,20	392,05	323,90	251,90	+ 72,0
	8	Poussier axe	17.000	24,2	5,8	15,0	5.7	537,69	10,20	527,49	535.50	533.50	+ 2,0
	9	Mixtes axe	7.000	47,0	12,5	14,0	3.5	343.96	10,20	333.76	314.76	348,90	+ 66,0
IV	10	Schlamm axe	6.000	40,5	26,1	19,0	3,2	390,45	30	360,45	287,60	231,60	+ 56,0

Observations : Fer : signifie transport par Chemin de Fer.
Axe : signifie transport par camions.

ou

$$\Sigma_i (h_i - H) x_i \leqslant 0.$$

h_i = % en eau de chaque sorte introduite dans le mélange.

$$H = 15\ \%.$$

Le % en cendres du mélange fourni ne doit pas dépasser C %, c'est-à-dire

$$\Sigma_i c_i x_i' \leqslant C \Sigma_i x_i'$$

avec

$$x_i' = \frac{100 - h_i}{100} x_i$$

C_i = % en cendres de chaque sorte.
x_i' = tonnage sec de chaque sorte.
C = 40 %.

Le % en matières volatiles du mélange doit être supérieur à M.V., c'est-à-dire

$$\Sigma_i (m.v.)_i x_i' \geqslant (M.V.) \Sigma_i x_i'$$

$(m.v.)_i$ = % en matières volatiles de chaque sorte

$$M.V. = 15\ \%.$$

Dans la recherche de la solution optimale, nous ne tiendrons pas compte, pour l'instant, des deux dernières contraintes techniques se rapportant aux cendres et aux matières volatiles.

Il semble d'ailleurs, à l'examen du tableau I, que ces deux contraintes seront facilement satisfaites par la solution trouvée, ce que nous vérifierons après obtention de celle-ci.

Nous allons donc rechercher la solution qui maximalise la fonction économique et qui satisfait aux contraintes formulées ci-dessus.

Mais ces contraintes qui sont actuellement présentées sous formes d'inéquations vont être transformées en équations par l'utilisation d'une « astuce mathématique » ; nous allons y introduire des « variables d'écart », que nous désignerons par x_i^e (i de 1 à 10).

La solution optimale recherchée devra donc satisfaire aux équations suivantes :

$$x_1 + x_1' + x_1^e = A_1 \qquad (1)$$
$$x_2 + x_2' + x_2^e = A_2 \qquad (2)$$
$$x_3 + x_3^e = A_3 \qquad (3)$$
$$x_4 + x_4^e = A_4 \qquad (4)$$
$$x_5 + x_5^e = A_5 \qquad (5)$$
$$x_6 + x_6^e = A_6 \qquad (6)$$
$$x_7 + x_7^e = A_7 \qquad (7)$$
$$x_8 + x_8^e = A_8 \qquad (8)$$
$$x_9 + x_9^e = A_9 \qquad (9)$$
$$x_{10} + x_{10}^e = A_{10} \qquad (10)$$
$$\sum_{i=1}^{i=10} x_i \cdot p_i = B \qquad (11)$$
$$\sum_{i=1}^{i=10} (h_i - H) x_i = 0. \qquad (12)$$

Il s'agira donc de trouver une solution d'un système linéaire comprenant 12 équations et 22 inconnues (12 variables de base et 10 variables d'écart) et qui maximalise la fonction économique Z.

Une première opération que nous pouvons effectuer immédiatement est l'annulation de variables x_1' et x_2' car il apparaît, à la lecture du tableau I, que les transports par fer sont moins avantageux que les transports par camions au départ du siège I.

On aura donc au départ

$$x_1' = 0$$
$$x_2' = 0.$$

et les contraintes à satisfaire deviendront

$$x_1 + x_1^e = A_1 \qquad (1)$$
$$x_2 + x_2^e = A_2 \qquad (2)$$
$$x_3 + x_3^e = A_3 \qquad (3)$$
$$x_4 + x_4^e = A_4 \qquad (4)$$
$$x_5 + x_5^e = A_5. \qquad (5)$$
$$x_6 + x_6^e = A_6 \qquad (6)$$
$$x_7 + x_7^e = A_7 \qquad (7)$$
$$x_8 + x_8^e = A_8 \qquad (8)$$
$$x_9 + x_9^e = A_9 \qquad (9)$$
$$x_{10} + x_{10}^e = A_{10} \qquad (10)$$
$$\Sigma_i x_i p_i = B \qquad (11)$$
$$\Sigma_i (h_i - H) x_i = 0 \qquad (12)$$

Il restera donc à résoudre un système de 12 équations à 20 inconnues (y compris les variables d'écart).

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser une méthode classique de programmation linéaire, l'algorithme du Simplexe, mis au point par G.B. Dantzig (Simplex Méthod).

Du point de vue mathématique, la théorie des programmes linéaires résout le problème suivant : étant donné un certain nombre d'inconnues liées par des inégalités ou des égalités linéaires, trouver les valeurs de ces inconnues qui rendent maximum une fonction linéaire de celles-ci, appelée objectif.

Les liaisons entre les inconnues sont appelées contraintes.

La méthode classique pour résoudre ce problème est la *méthode des sélections* ; cependant cette méthode entraîne l'opérateur à examiner un nombre de sélections très élevé pour peu que le nombre d'inconnues et le nombre d'équations soit assez élevé.

Par exemple dans le problème qui nous occupe, à 20 inconnues et 12 équations, nous devrions examiner C^{12}_{12+20} sélections, ce qui serait beaucoup trop long et beaucoup trop coûteux, même avec une machine à calculer électronique.

La méthode du Simplexe permet de ne considérer qu'un nombre de sélections beaucoup plus restreint, on détermine d'abord une solution de base possible et, à partir de cette sélection, la méthode permet de trouver une nouvelle sélection qui conduise certainement à une valeur supérieure ou tout au moins égale de l'objectif et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne la sélection qui donne la valeur maximum recherchée de l'objectif, à partir de laquelle il n'est plus possible de trouver une nouvelle sélection qui accroisse encore l'objectif. On décrit ainsi une chaîne de sélections qui comprend un nombre très inférieur au nombre total des sélections possibles.

La justification mathématique de cet algorithme est basée sur la théorie des polyèdres convexes et utilise des notions de calcul matriciel ; il nous est impossible, dans le cadre de cette note, d'en donner les éléments.

Le lecteur pourra utilement consulter les ouvrages cités dans la bibliographie reproduite en annexe, il y trouvera l'exposé complet de la méthode du Simplexe.

MECANISME DE LA METHODE DU SIMPLEXE

Le principe en est le suivant.

On détermine une solution de base satisfaisant aux contraintes.

On dresse ensuite un tableau comme représenté dans la suite (tableaux des différentes sélections étudiées) ; il est construit de la façon suivante.

La première ligne représente les variables x_i qui ne font pas partie de la solution de base.

Ces variables sont appelées variables de travail.

Dans le problème étudié, celles-ci sont au nombre de 8, c'est-à-dire 8 variables de travail = 20 variables — 12 variables de base.

La deuxième ligne représente les coefficients R_i de ces variables dans la fonction à maximaliser.

Dans la première colonne du tableau, on inscrit l'une en dessous de l'autre les variables constituant la base, avec leur valeur.

Dans la deuxième colonne, on inscrit en face de chacune des variables de base le coefficient R_i correspondant.

On a ainsi constitué les deux lignes et les deux colonnes d'entrée du tableau.

Il s'agit ensuite d'exprimer les coefficients de chacune des variables de travail dans les contraintes d'égalité par une combinaison linéaire des coefficients des seules variables de base dans ces contraintes.

Ces coefficients nous les désignons par u_1 u_2 u_3 etc... et nous les inscrivons dans une colonne en-dessous de chaque variable de travail correspondante.

Nous calculons ensuite les Z_i correspondant à chaque variable de travail ; pour ce faire, nous effectuons la somme des produits des coefficients u_i de chaque colonne par les coefficients R_i inscrits à gauche, donc

$$Z_i = \Sigma R_i \cdot u_i$$

nous inscrivons le résultat dans l'avant-dernière ligne du tableau dans la colonne correspondant à la variable de travail considérée.

Nous calculons enfin les termes de la dernière ligne du tableau en faisant les différences $(R_i - Z_i)$ à partir des coefficients R_i de la 2^{me} ligne et des valeurs Z_i de l'avant-dernière ligne.

Si les quantités $(R_i - Z_i)$ ainsi obtenues étaient toutes nulles ou négatives, nous aurions déjà déterminé par la sélection choisie le maximum de l'objectif. Dans le problème étudié, il n'en est rien.

Nous déterminons alors la nouvelle variable de base à faire entrer dans la sélection suivante par une règle simple : c'est celle qui correspond à la plus grande valeur positive de $(R_i - Z_i)$.

Nous marquons cette valeur d'une astérique dans la dernière ligne du tableau et nous retenons la variable correspondante que nous introduirons dans la prochaine sélection (voir par exemple tableau de la 1^{re} sélection, la variable à faire entrer dans la 2^{me} sélection est x_9).

Il faut maintenant déterminer quelle variable nous devons chasser de la sélection pour la remplacer par la variable à faire entrer (soit x_9). Nous examinons pour cela la colonne x_9 du tableau, nous divisons les valeurs inscrites dans la première colonne du tableau, c'est à dire les valeurs attribuées aux variables de base, par les éléments correspondants de la colonne x_9, c'est-à-dire par les u_i de la colonne en question. La variable à chasser de la sélection est celle qui correspond au minimum positif des résultats obtenus par ces divisions, soit dans l'exemple de la première sélection la variable x_9^e correspondant au minimum de

$$\frac{x_i \text{ (de base)}}{u_i}$$

et nous marquons cette valeur d'une astérique.

La méthode du Simplexe a donné une nouvelle sélection qui sera certainement plus proche de l'optimum que la première ; nous vérifierons d'ailleurs qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire, dans notre cas, qu'il y a augmentation de la recette.

Nous procédons de la même façon pour la nouvelle sélection et ainsi de suite jusqu'à ce que nous trouvions une sélection pour laquelle tous les $(R_i - Z_i)$ sont négatifs ou nuls.

Lorsque cette étape est atteinte, la sélection correspondante constitue la solution optimale, nous vérifions également qu'il en est bien ainsi.

APPLICATION DE LA METHODE DU SIMPLEXE AU PROBLEME A RESOUDRE

Nous recherchons d'abord une *solution de base* satisfaisant aux contraintes.

Soit

$$\begin{aligned} x_1 &= 6.000 \text{ t} \\ x_2 &= 5.000 \text{ t} \\ x_3 &= 2.000 \text{ t} \qquad \Sigma x_i = 34.000 \text{ t} \\ x_7 &= 5.000 \text{ t} \\ x_8 &= 10.000 \text{ t} \\ x_{10} &= 6.000 \text{ t} \end{aligned}$$

Vérifions que cette solution satisfait aux contraintes.

1°) Contrainte de disponibilité.

$$\begin{aligned} x_1 &= 6.000 \text{ t} = A_1 \\ x_2 &= 5.000 \text{ t} = A_2 \\ x_3 &= 2.000 \text{ t} = A_3 \\ x_7 &= 5.000 \text{ t} < A_7 \\ x_8 &= 10.000 \text{ t} < A_8 \\ x_{10} &= 6.000 \text{ t} = A_{10} \end{aligned}$$

2°) Contraintes de demande.

$$\Sigma x_i p_i = 6.000 \times 3,9 + 5.000 \times 5,0 + 2.000 \times 3,7 + 5.000 \times 3,7 + 10.000 \times 5,7 + 6.000 \times 3,2 \cong 151.000 \text{ Gcal.}$$

3°) Contrainte technique.

$$\Sigma (h_i - 0,15)x_i = (0,23 - 0,15)\,6.000 + (0,036 - 0,15)\,5.000 + (0,113 - 0,15)\,2.000 + (0,235 - 0,15)\,5.000 + (0,058 - 0,15)\,10.000 + (0,26 - 0,15)\,6.000 \cong 0.$$

D'où

Variables de base (12)	*Variables de travail* (8)
$x_1 = 6.000$	$x_1^e = 0$
$x_2 = 5.000$	$x_2^e = 0$
$x_3 = 2.000$	$x_3^e = 0$
$x_4^e = 1.200$	$x_4 = 0$
$x_5^e = 3.300$	$x_5 = 0$
$x_6^e = 1.000$	$x_6 = 0$
$x_7 = 5.000$	—
$x_7^e = 1.000$	—
$x_8 = 10.000$	—
$x_8^e = 7.000$	—
$x_9^e = 7.000$	$x_9 = 0$
$x_{10} = 6.000$	$x_{10}^e = 0$

L'application du mécanisme, que nous venons de décrire, à la première sélection (solution de base) nous permet de dresser le tableau II.

La variable qui entrera dans la base de la sélection suivante sera x_9, celle qui en sortira sera x_9^e.

Nous calculons alors pour la nouvelle sélection (2^{me}) la valeur des variables de base qui doivent toujours satisfaire aux contraintes et nous dressons le tableau III. Nous vérifions que cette deuxième sélection est plus bénéfique que la 1re, c'est-à-dire qu'il y a augmentation de la recette.

Le tableau III nous permet de trouver une 3^{me} sélection qui provoquera une nouvelle augmentation de la recette et ainsi de suite jusqu'à ce que nous atteignions une sélection pour laquelle tous les coefficients $(R_i - Z_i)$ sont négatifs ou nuls.

Cette sélection nous fournira la solution optimale qui maximalisera la recette que le Charbonnage peut retirer de ses fournitures en combustibles à la Centrale.

Dans notre étude pour atteindre cette solution optimale, nous avons dû procéder à 6 sélections qui sont représentées aux tableaux II, III, IV, V, VI et VII.

Les calculs justifiant les augmentations de recette provoquées par ces différentes sélections sont groupés au tableau VIII.

A partir de la 6^{me} sélection, si nous en élaborons une nouvelle, la 7^{me}, nous constatons (voir tableau IX) que celle-ci est moins favorable que la précédente, ce qui justifie notre conclusion, à savoir que la 6^{me} sélection fournit la solution optimale de notre problème.

Cette solution optimale est représentée par la 1re colonne du tableau VII, soit :

$$\begin{aligned} x_1 &= 6.000 \text{ t} & x_7 &= 6.000 \text{ t} \\ x_2 &= 5.000 \text{ t} & x_8 &= 1.960 \text{ t} \\ x_3 &= 2.000 \text{ t} & x_8^e &= 15.040 \text{ t} \qquad \Sigma x_i = 36.310 \text{ t} \\ x_4 &= 1.200 \text{ t} & x_9 &= 7.000 \text{ t} \\ x_5 &= 3.300 \text{ t} & x_{10} &= 2.850 \text{ t} \\ x_6 &= 1.000 \text{ t} & x_{10}^e &= 3.150 \text{ t} \end{aligned}$$

Au tableau X, nous reproduisons les calculs qui montrent que cette solution satisfait bien aux contraintes.

Le supplément de recette par rapport au barème « officiel » que le charbonnage retirait de ses fournitures à la Centrale était initialement de :

$$Z \text{ (solution de base)} = 6.000 \times 50 \text{ F} + 5.000 \times -1 \text{ F} + 2.000 \times 41 \text{ F} + 5.000 \times 72 \text{ F} + 10.000 \times 2 \text{ F} + 6.000 \times 56 \text{ F} = 1.093.000 \text{ F/mois.}$$

En fournissant à la Centrale un mélange correspondant à la solution optimale, ce supplément de recette deviendra :

$$Z \text{ (solution optimale)} = 6.000 \times 50 \text{ F} + 5.000 \times -1 \text{ F} + 2.000 \times 41 \text{ F} + 1.200 \times 61 \text{ F} + 3.300 \times 0 \text{ F} + 1.000 \times 43 \text{ F} + 6.000 \times 72 \text{ F} + 1.960 \times 2 \text{ F} + 7.000 \times 66 \text{ F} + 2.850 \times 56 \text{ F} = 1.550.720 \text{ F/mois.}$$

soit 457.710 F en plus par mois.

TABLEAU II. — 1re *Sélection (Solution de base).*

	$x_i \rightarrow$	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}^e
	$R_i \rightarrow$	0	0	0	61	0	43	66	0
x_1 = 6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 = 5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 = 2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4^e = 1.200	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5^e = 3.300	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6^e = 1.000	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7 = 5.000	72	— 0,985	0,230	— 0,159	1,040	— 0,106	0,170	0,210	— 1,11
x_7^e = 1.000	0	0,985	— 0,230	0,159	— 1,040	0,106	— 0,170	— 0,210	1,11
x_8 = 10.000	2	— 0,044	— 1,030	— 0,545	0,008	1,12	0,590	0,473	0,162
x_8^e = 7.000	0	0,044	1,030	0,545	— 0,008	— 1,12	— 0,590	— 0,473	— 0,162
x_9^e = 7.000	0	0	0	0	0	0	0	1 *	0
x_{10} = 6.000	56	0	0	0	0	0	0	0	1
	$Z_i \rightarrow$	— 21	13,5	27,9	75	— 5,4	13,4	16,2	— 23,7
	$R_i - Z_i \rightarrow$	+ 21	— 13,5	— 27,9	— 14	+ 5,4	29,6	49,8 *	+ 23,7

TABLEAU III. — 2me *Sélection.*

	$x_i \rightarrow$	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_4	x_5	x_6	x_9^e	x_{10}^e
	$R_i \rightarrow$	0	0	0	61	0	43	0	0
x_1 = 6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 = 5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 = 2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4^e = 1.200	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5^e = 3.300	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6^e = 1.000	0	0	0	0	0	0	1 *	0	0
x_7 = 3.540	72	— 0,985	0,230	— 0,159	1,040	— 0,106	0,170	— 0,210	— 1,11
x_7^e = 2.460	0	0,985	— 0,230	0,159	— 1,040	0,106	— 0,170	0,210	1,11
x_8 = 6.720	2	— 0,044	— 1,030	— 0,545	0,008	1,12	0,590	— 0,473	0,162
x_8^e = 10.280	0	0,044	1,030	0,545	— 0,008	— 1,12	— 0,590	0,473	— 0,162
x_9 = 7.000	66	0	0	0	0	0	0	1	0
x_{10} = 6.000	56	0	0	0	0	0	0	0	1
	$Z_i \rightarrow$	— 21	13,5	27,9	75	— 5,4	13,5	49,8	— 23,7
	$R_i - Z_i \rightarrow$	+ 21	— 13,5	— 27,9	— 14	5,4	29,6 *	— 49,8	23,7

TABLEAU IV. — 3^me^ *Sélection.*

		$x_i \rightarrow$	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_4	x_5	x_6^e	x_9^e	x_{10}^e
		$R_i \rightarrow$	0	0	0	61	0	0	0	0
x_1 =	6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 =	5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 =	2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4^e =	1.200	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5^e =	3.300	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6 =	1.000	43	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7 =	3.400	72	— 0,985	0,280	— 0,159	1,040	— 0,106	— 0,170	— 0,210	— 1,11
x_7^e =	2.600	0	0,985	— 0,280	0,159	— 1,040	0,106	0,170	0,210	1,11 *
x_8 =	6.150	2	— 0,044	— 1,030	— 0,545	0,008	1,12	— 0,590	— 0,473	0,162
x_8^e =	10.850	0	0,044	1,030	0,545	— 0,008	— 1,12	0,590	0,473	— 0,162
x_9 =	7.000	66	0	0	0	0	0	0	1	0
x_{10} =	6.000	56	0	0	0	0	0	0	0	1
		$Z_i \rightarrow$	— 21	13,5	27,9	75	— 5,4	29,6	49,8	— 23,7
		$R_i - Z_i \rightarrow$	+ 21	— 13,5	— 27,9	— 14	5,4	— 29,6	— 49,8	23,7 *

TABLEAU. — 4^me^ *Sélection.*

		$x_i \rightarrow$	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_4	x_5	x_6^e	x_7^e	x_9^e
		$R_i \rightarrow$	0	0	0	61	0	0	0	0
x_1 =	6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 =	5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 =	2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4^e =	1.200	0	0	0	0	1 *	0	0	0	0
x_5^e =	3.300	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6 =	1.000	43	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7 =	6.000	72	0	0	0	0	0	0	1	0
x_8 =	5.800	2	— 0,186	— 0,985	— 0,565	0,160	1,090	— 0,610	— 0,145	— 0,500
x_8^e =	11.200	0	0,186	0,985	0,565	— 0,160	— 1,090	0,610	0,145	0,500
x_9 =	7.000	66	0	0	0	0	0	0	0	1
x_{10} =	3.650	56	— 0,870	0,205	— 0,140	1,030	— 0,094	— 0,150	— 0,890	— 0,193
x_{10}^e =	2.350	0	0,870	— 0,205	0,140	— 1,030	0,094	0,150	0,890	0,193
		$Z_i \rightarrow$	1,0	8,3	33,0	58,0	— 3,1	33,5	22,0	54,2
		$R_i - Z_i \rightarrow$	— 1,0	— 8,3	— 33,0	+ 3,0 *	+ 3,1	— 33,5	— 22,0	— 54,2

TABLEAU VI. — 5^{me} *Sélection.*

	$x_i \rightarrow$ $R_i \rightarrow$	x_1^e 0	x_2^e 0	x_3^e 0	x_4^e 0	x_5 0	x_6^e 0	x_7^e 0	x_9^e 0
x_1 = 6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 = 5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 = 2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4 = 1.200	61	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5^e = 3.300	0	0	0	0	0	1 *	0	0	0
x_6 = 1.000	43	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7 = 6.000	72	0	0	0	0	0	0	1	0
x_8 = 5.600	2	— 0,186	— 0,985	— 0,565	— 0,160	1,090	— 0,610	— 0,145	— 0,500
x_8^e = 11.400	0	0,186	0,985	0,565	0,160	— 1,090	0,610	0,145	0,500
x_8 = 7.000	66	0	0	0	0	0	0	0	1
x_{10} = 2.550	56	— 0,870	0,205	— 0,140	— 1,030	— 0,094	— 0,150	— 0,890	— 0,193
x_{10}^e = 3.450	0	0,870	— 0,205	0,140	1,030	0,094	0,150	0,890	0,193
	$Z_i \rightarrow$	1,0	8,3	33,0	3,0	— 3,1	33,5	22,0	54,2
	$R_i - Z_i \rightarrow$	— 1,0	— 8,3	— 33,0	— 3,0	+ 3,1 *	— 33,5	— 22,0	— 54,2

TABLEAU VII. — 6^{me} *Sélection.*

	$x_i \rightarrow$ $R_i \rightarrow$	x_1^e 0	x_2^e 0	x_3^e 0	x_4^e 0	x_5^e 0	x_6^e 0	x_7^e 0	x_9^e 0
x_1 = 6.000	50	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2 = 5.000	— 1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3 = 2.000	41	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4 = 1.200	61	0	0	0	1	0	0	0	0
x_5 = 3.300	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6 = 1.000	43	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7 = 6.000	72	0	0	0	0	0	0	1	0
x_8 = 1.960	2	— 0,186	— 0,985	— 0,565	— 0,160	— 1,090	— 0,610	— 0,145	— 0,500
x_8^e = 15.040	0	0,186	0,985	0,565	0,160	1,090	0,610	0,145	0,500
x_9 = 7.000	66	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10} = 2.850	56	— 0,870	0,205	— 0,140	— 1,030	0,094	— 0,150	— 0,890	— 0,193
x_{10}^e = 3.150	0	0,870	— 0,205	0,140	1,030	— 0,094	0,150	0,890	0,193
	$Z_i \rightarrow$	1,0	8,3	33,0	3,0	3,1	33,5	22,05	54,2
	$R_i - Z_i \rightarrow$	— 1,0	— 8,3	— 33,0	— 3,0	— 3,1	— 33,5	— 22,0	— 54,2

Si nous rapportons ces suppléments au tonnage fourni, il vient :

$$\text{Solution de base : } \frac{1.093.000}{34.000} \cong 32{,}15 \text{ F/t}$$

$$\text{Solution optimale : } \frac{1.550.710}{36.310} \cong 42{,}50 \text{ F/t}$$

L'application de la méthode du Simplexe à la solution de base nous a donc permis de trouver une solution optimale qui améliore la valorisation des fournitures à la Centrale d'environ 10 F/t.

Le tonnage non utilisé par la Centrale, soit

$$\begin{aligned} x_8^e &= 15.040 \text{ t} \\ x_{10}^e &= 3.150 \text{ t} \\ \hline & \quad 18.190 \text{ t} \end{aligned}$$

sera disponible pour d'autres utilisateurs qui l'achèteront au prix « officiel ».

TABLEAU VIII.

Augmentations de recette provoquées par les différentes sélections.

1°) 2^{me} Sélection :

$$\begin{array}{lrcrcr} x_9 = & +7.000 \text{ t} & \times & 66 \text{ F} = & + & 462.000 \text{ F} \\ x_7 = & -1.460 \text{ t} & \times & 72 \text{ F} = & - & 105.000 \text{ F} \\ x_8 = & -3.280 \text{ t} & \times & 2 \text{ F} = & - & 6.560 \text{ F} \\ \hline & & & & + & 350.440 \text{ F} \end{array}$$

2°) 3^{me} Sélection :

$$\begin{array}{lrcrcr} x_6 = & +1.000 \text{ t} & \times & 43 \text{ F} = & + & 43.000 \text{ F} \\ x_7 = & -140 \text{ t} & \times & 72 \text{ F} = & - & 10.050 \text{ F} \\ x_8 = & -570 \text{ t} & \times & 2 \text{ F} = & - & 1.140 \text{ F} \\ \hline & & & & + & 31.810 \text{ F} \end{array}$$

3°) 4^{me} Sélection :

$$\begin{array}{lrcrcr} x_7 = & +2.600 \text{ t} & \times & 72 \text{ F} = & + & 187.000 \text{ F} \\ x_8 = & -550 \text{ t} & \times & 2 \text{ F} = & - & 700 \text{ F} \\ x_{10} = & -2.350 \text{ t} & \times & 56 \text{ F} = & - & 132.000 \text{ F} \\ \hline & & & & + & 54.700 \text{ F} \end{array}$$

4°) 5^{me} Sélection :

$$\begin{array}{lrcrcr} x_4 = & +1.200 \text{ t} & \times & 61 \text{ F} = & + & 73.000 \text{ F} \\ x_8 = & -200 \text{ t} & \times & 2 \text{ F} = & - & 400 \text{ F} \\ x_{10} = & -1.100 \text{ t} & \times & 56 \text{ F} = & - & 61.600 \text{ F} \\ \hline & & & & + & 11.200 \text{ F} \end{array}$$

5°) 6^{me} Sélection :

$$\begin{array}{lrcrcr} x_5 = & +3.300 \text{ t} & \times & 0 \text{ F} = & & 0 \text{ F} \\ x_8 = & -3.640 \text{ t} & \times & 2 \text{ F} = & - & 7.280 \text{ F} \\ x_{10} = & +300 \text{ t} & \times & 56 \text{ F} = & + & 16.800 \text{ F} \\ \hline & & & & + & 9.560 \text{ F} \end{array}$$

$$\text{Soit au total : } \quad + 457.710 \text{ F}$$

TABLEAU IX. — 7^{me} *Sélection.*

Variable à faire entrer dans la base : x_1^e.

Variable à faire sortir de la base : x_{10}^e.

(correspondant au minimum positif de x_i/u_i)

$$\frac{x_{10}^e}{u_{10}^e} = \frac{3.150}{0{,}870} \cong 3.630$$

Calcul des variables de base.

Variables de base	*Variables de travail*
$x_1 + x_1^e = 6.000$	—
$x_2 = 5.000$	$x_2^e = 0$
$x_3 = 2.000$	$x_4^e = 0$
$x_4 = 1.200$	$x_4^e = 0$
$x_5 = 3.300$	$x_5^e = 0$
$x_6 = 1.000$	$x_6^e = 0$
$x_7 = 6.000$	$x_7^e = 0$
$x_8 + x_8^e = 17.000$	—
$x_9 = 7.000$	$x_9^e = 0$
$x_{10} = 6.000$	$x_{10}^e = 0$

$$3{,}9\, x_1 + 5{,}7\, x_8 = 24.720$$

$$0{,}08\, x_1 - 0{,}092\, x_8 = -47$$

$$x_1 = \frac{24.720 \times -0{,}092 \;-\; 5{,}7 \times -47}{3{,}9 \times -0{,}092 \;-\; 5{,}7 \times 0{,}08}$$

$$= \frac{-2.012}{-0{,}814} = 2.470$$

$$x_8 = \frac{3{,}9 \times -47 \;-\; 0{,}08 \times 24.720}{3{,}9 \times -0{,}092 \;-\; 5{,}7 \times 0{,}08}$$

$$= \frac{-2.153}{-0{,}814} = 2.650$$

$$x_1^e = 6.000 - 2.470 = 3.530 \,;$$

$$x_8^e = 17.000 - 2.650 = 14.350$$

Supplément de recette par rapport à la 6me Sélection.

$$x_1 = -3.530 \times 50\ F = -177.000\ F$$
$$x_8 = +\ 690 \times 2\ F = +\ 1.380\ F$$
$$x_{10} = +2.850 \times 56\ F = +160.000\ F$$
$$-\ 15.620\ F$$

Il y a diminution de recette donc cette sélection est moins bonne que la précédente.

TABLEAU X.

Vérification du respect des contraintes par la solution optimale.

1) Fourniture mensuelle de Gcal.

$3,9 \times 6.000 + 5,0 \times 5.000 + 3,7 \times 2.000 + 3,9 \times 1.200 + 6,0 \times 3.300 + 4,0 \times 1.000 + 3,7 \times 6.000 + 5,7 \times 1.960 + 3,5 \times 7.000 + 3,2 \times 2.850 = 151.272$ Gcal soit $\cong 151.000$ Gcal demandées.

2) Teneur en eau du mélange.

$0,23 \times 6.000 + 0,036 \times 5.000 + 0,113 \times 2.000 + 0,238 \times 1.200 + 0,038 \times 3.300 + 0,110 \times 1.000 + 0,235 \times 6.000 + 0,058 \times 1.960 + 0,125 \times 7.000 + 0,260 \times 2.850 = 5.446$

$$\frac{5.446}{36.310} \cong 0,15$$

soit 15 % eau demandé pour le mélange fourni.

3) Teneur en cendres du mélange.

Détermination du tonnage sec.

$6.000 \times 0,77 + 5.000 \times 0,964 + 2.000 \times 0,887 + 1.200 \times 0,762 + 3.300 \times 0,962 + 1.000 \times 0,89 + 6.000 \times 0,765 + 1.960 \times 0,942 + 7.000 \times 0,875 + 2.850 \times 0,740 = 30.839$ t.

Détermination du poids des cendres.

$0,322 \times 4.620 + 0,411 \times 1.774 + 0,323 \times 4.820 + 0,335 \times 910 + 0,227 \times 3.150 + 0,413 \times 890 + 0,390 \times 4.590 + 0,242 \times 1.850 + 0,470 \times 6.125 + 0,405 \times 2.110 = 11.202$ t.

Soit

$$\frac{11.202}{30.839} \cong 36\ \%\ \text{cendres}$$

contrainte respectée car la teneur en cendres du mélange est inférieure à 40 %.

4) Teneur en matières volatiles du mélange.

Détermination du % en M.V. sur sec.

$0,22 \times 4.620 + 0,18 \times 1.774 + 0,22 \times 4.820 + 0,16 \times 910 + 0,165 \times 3.150 + 0,16 \times 890 + 0,14 \times 4.590 + 0,15 \times 1.850 + 0,14 \times 6.125 + 0,19 \times 2.110 = 5.368.$

Soit

$$\frac{5.368}{30.839} \cong 17,5\ \%.$$

contrainte respectée car la teneur en M.V. du mélange est supérieure à 15 %.

BIBLIOGRAPHIE

1. Eléments de recherche opérationnelle, par Churchman, Aekoff et Arnoff — Dunod 1961.
2. Programmation linéaire, par M. Simonnard — Dunod 1962.
3. Théorie des jeux et programmation linéaire, par S. Vajda — Dunod 1959.
4. Mathématiques et statistiques pour les Economistes - Tome 1, par G. Tintner — Dunod 1962.
5. Introduction to Linear Programming, par Charnes, Cooper, Henderson — Editeur : John Wiley.