Calcul des Réseaux de Ventilation

Méthode directe (*)

L. VAN DEN DUNGEN

Ingénieur principal à Inichar.

SAMENVATTING

De oplossing van ventilatienetten, hoe ingewikkeld ze ook wezen, is mogelijk dank zij de methode der opeenvolgende benaderingen (Methode van Cross). Dit werd in 1952 voor het eerst experimenteel bewezen door professor Hinsley (zie Transactions of Colliery Eng.). Dit is uiterst belangrijk, voornamelijk voor België, waar de diepte en de uitbreiding van de mijnwerken duizenden KW voor de luchtverversing vereisen, die men van verspilling in regeldeuren dient te vrijwaren.

Ieder net, hetzij van de eerste graad (zoals in de electriciteit), hetzij van een hogere graad, kan theoretisch opgelost worden door de wetten van Kirchhoff. In de praktijk echter lopen de berekeningen haast in het oneindige van zodra er 5 tot 6 mazen zijn. De methode van Cross, die uitgaat van een willekeurige oplossing en voortschrijdt met variaties is eveneens zeer langdradig.

Het leek aangewezen een methode te beproeven die het net niet eerbiedigt, maar die dit net vervangt door steeds eenvoudiger wordende netten, dank zij de identiteiten van Kenelly. Met een net van de eerste graad gaat zulks zonder moeite. Men bespaart zich overigens de berekeningen door rechtstreekse proeven op analoge machines.

De enige moeilijkheid die aan een rechtstreekse oplossing gesteld werd, bestond dus in het herleiden van een net van een hogere graad tot een net van de eerste graad.

Men toont aan dat men dit kan bereiken door met dunne schijven te werk te gaan.

De macht tot dewelke men het debiet dient te verheffen, verminderd met een eenheid, wordt ontbonden in eenvoudige breuken, die radicalen voorstellen.

Indien de druk weinig verandert, voor een voldoende aantal termen, verschilt de radicaal weinig van de vorige radicaal verminderd van een eenheid. Bovendien vermindert aldus de gemaakte totale fout regelmatig indien men het aantal schijven vermeerdert. Hieruit volgt een zeer snelle methode die een oplossing geeft waarvan de nauwkeurigheid naar believen kan gekozen worden.

RESUME

Résoudre un réseau de ventilation est actuellement chose possible, si complexe soit-il, la méthode des approximations successives (méthode de Cross) permet d'en venir à bout. C'est le professeur Hinsley qui le premier en a donné la preuve expérimentale en 1952 (voir Transactions of Colliery Eng.). C'est chose bien utile actuellement, en Belgique notamment, où l'approfondissement et l'extension des travaux demandent des milliers de kW qu'il serait indécent de gaspiller dans des guichets régulateurs.

Tout réseau, qu'il soit du premier degré (comme en électricité) ou de degré supérieur, est théoriquement soluble par les lois de Kirchhoff; dans la pratique cependant, dès qu'il y a 5 ou 6 mailles, les calculs s'allongent à l'infini. La méthode de Cross, qui part d'une solution quelconque et progresse avec les variations, est aussi très lente.

Il était tentant d'essayer une méthode qui ne respecte pas le réseau mais lui substitue des réseaux de plus en plus simples grâce aux identités de Kennelly. Avec un réseau du premier degré, cela va tout seul, on s'épargne d'ailleurs les calculs par l'expérience directe au moyen des machines analogiques.

(*) Il s'agit d'une méthode nouvelle inaugurée par M. van den Dungen et mise au point en collaboration avec M. de Wasseige, Ingénieur à Inichar.

La seule difficulté pour une solution directe résidait donc à ramener un réseau de degré supérieur à un réseau du premier degré. En pratiquant par tranches minces, il est démontré ici qu'on peut y arriver. La puissance à laquelle il faut élever le débit, diminué d'une unité, est décomposée en des fractions simples représentant des radicaux. Quand la pression varie peu, pour un nombre de termes suffisant, le radical même diffère de peu du radical précédent augmenté d'une unité. De plus, l'erreur totale produite ainsi diminue régulièrement quand le nombre de tranches augmente. Il en découle une méthode très rapide fournissant une réponse aussi précise qu'on le désire.

Introduction.

Quand il faut prévoir la ventilation pour une mine nouvelle ou améliorer la ventilation d'une mine existante, on est amené à estimer les pressions nécessaires pour les débits désirés en fonction des résistances d'un réseau qu'on doit ramener à ce que l'on appelait anciennement son orifice équivalent ($s = 0{,}38\, Q/\sqrt{H}$). Actuellement, pour la facilité des calculs, on considère la résistance de la mine : $R = H/Q^2$; s et R sont ainsi liés par la relation $s\sqrt{R} = 0{,}38$. Les nombreux types de machines qui ont été inventés pour suppléer à la difficulté de ces calculs montrent suffisamment l'intérêt du sujet.

A part le tâtonnement, aidé des machines analogiques, on ne connaissait guère jusqu'à présent que la méthode de H. Cross (1836), remise en honneur par les Professeurs Potts et Hinsley. Elle se base uniquement sur les lois de Kirchhoff appliquées à la ventilation, ignorant systématiquement les pressions (ou potentiels selon le cas) des nœuds; elle procède par approximations successives. En outre, par suite de l'introduction d'une solution arbitraire (ce qui réduit beaucoup le travail), on est contraint de progresser à pas de pèlerin. La méthode est lente et ne peut donner la solution exacte. Elle se prête bien, cependant, à la mécanisation par l'ordinateur, la lenteur des calculs étant compensée par la rapidité de la machine. De plus, cette méthode est facile à « ordonner » puisqu'on ne traite qu'une maille à la fois.

La nouvelle méthode de calcul, présentée ici, diffère radicalement des autres. On part de la solution exacte en électricité et on s'achemine vers la solution exacte en ventilation. Si l'on se contente d'une solution à 5 % près, la solution est très rapide; elle est plus longue si l'on désire la solution exacte. La règle à calcul suffit, les machines hâtent cependant beaucoup la solution et suppriment les calculs fastidieux.

Cette méthode utilise les pressions aux différents nœuds du réseau, ce qui présente plusieurs avantages. Elles varient d'une façon plus régulière que les débits et s'étagent progressivement dans le sens du courant. De la formule $H = R \,.\, Q^2$, on tire :

$$\lg H = \lg R + 2 \lg Q$$

donc $$dQ/Q = \tfrac{1}{2}\, dH/H$$

une erreur sur le calcul de H n'entraîne donc qu'une erreur proportionnelle moitié moindre sur le calcul de Q.

I. — Exposé de la méthode.

Le calcul se déroule en plusieurs stades.

Premier stade.

On considère le réseau comme s'il était du premier degré, c'est-à-dire qu'en chaque branchement, la différence des pressions est admise : $H = R \,.\, Q$.

Les pressions en certains points d'entrée et de sortie du réseau étant fixées, on calcule assez facilement les pressions intermédiaires et les débits. Cela se ramène à un système d'équations du premier degré. Toutefois, la résolution algébrique de ce système est longue; s'il a y 20 nœuds et 10 mailles, cela fait 30 équations du premier degré et les 30 déterminants sont d'ordre 30. Pour tourner cette difficulté, on réduit le réseau par parallélisations et en faisant sauter les nœuds (voir application) jusqu'à n'avoir plus qu'un branchement équivalent; on recompose alors le réseau en sens inverse en reportant à leur place les pressions cherchées. Cette méthode est très rapide, elle demande environ 5 minutes par maille avec le calcul à la règle et moins encore si l'on dispose d'une machine analogique.

On obtient ainsi la solution 0 ou électrique.

Deuxième stade.

Un réseau à p branchements du second ordre peut s'écrire :

$$H_i = R_i \,.\, Q_i^2 \qquad \text{avec } i \text{ variant de 1 à } p,$$

ou, plus simplement, en laissant *i* sous-entendu :

$$H = R \,.\, Q^2 \tag{1}$$

Les relations (1) peuvent encore s'écrire :

$$H = R\, \underbrace{\sqrt[n]{Q}\ \sqrt[n]{Q}\ \sqrt[n]{Q}\ \ldots}_{n \text{ fois}} \times Q \tag{2}$$

n étant quelconque.

L'avantage de cette identité, c'est que, si l'on fait abstraction des radicaux, on a la solution 0. Pour *n* grand, la racine n^{me} de Q diffère peu de 1. En considérant successivement l'introduction d'un facteur $\sqrt[n]{Q}$ supplémentaire, on s'écarte peu de Q_0 tout en se rapprochant insensiblement du réseau du second degré.

Le réseau $H_0 = R \cdot Q_0$ a été résolu au premier stade; au premier échelon du deuxième stade, on doit calculer un réseau :

$$H' = R \cdot \sqrt[n]{Q} \cdot Q$$

soit un système de degré fractionnaire $(n+1)/n$, mais H variant peu dans un petit intervalle, on peut admettre $H_0 = H'$, c'est-à-dire :

$$R \cdot Q_0 = R \cdot \sqrt[n]{Q} \cdot Q$$

Il vient alors :

$$\sqrt[n]{Q} = \sqrt[n+1]{Q_0} \qquad (3)$$

Comme R est donné et que Q_0 a été calculé au premier stade, on peut donc poser :

$$R \cdot \sqrt[n]{Q} = R \cdot \sqrt[n+1]{Q_0} = R'$$

On se trouve en face du terme d'un nouveau réseau du premier degré :

$$H' = R' \cdot Q'$$

Par le même processus que celui du premier stade, on résout le réseau et on obtient donc H' et Q'.

On peut calculer alors une nouvelle résistance fictive :

$$R'' = R' \cdot \sqrt[n+1]{Q'} = R \cdot \sqrt[n+1]{Q_0} \cdot \sqrt[n+1]{Q'}$$

pour un troisième réseau à résoudre et ainsi de suite.

En poussant le calcul jusqu'au n^{me} échelon, il vient finalement :

$$H = R \cdot \underbrace{\sqrt[n+1]{Q_0} \cdot \sqrt[n+1]{Q'} \cdot \sqrt[n+1]{Q''} \ldots}_{n \text{ fois}} \times Q_1 \qquad (4)$$

Les indices ', '', ''' ... montrent qu'il ne s'agit pas d'une simple multiplication, comme c'est le cas pour les équations (2), mais chaque fois d'une résolution du système d'équation dans lequel les résistances varient progressivement.

Troisième stade.

Théoriquement, il faudrait faire $n = \infty$ pour obtenir la solution exacte. Le calcul pour une valeur élevée de n est très long, puisqu'il faudra résoudre autant de fois le système d'équation après avoir calculé les nouvelles résistances.

En fait, il suffit de calculer trois valeurs, par exemple la solution électrique (ou la solution pour $n = 0$), et deux autres.

On peut démontrer, en effet, que les valeurs, trouvées dans les différentes hypothèses faites pour n, se trouvent sur une hyperbole équilatère. Il suffit dès lors d'en chercher les asymptotes pour trouver la valeur exacte, c'est-à-dire celle qui correspond à $n = \infty$.

Soit $(H - X) \cdot (Y + n) = k$, la formule générale où H et n sont respectivement les pressions trouvées pour un n donné et X et Y des constantes qui mesurent la distance des axes aux asymptotes.

Le calcul est dès lors simple; supposons que l'on connaisse :

H_0 pour $n = 0$
H_1 pour $n = 1$
H_m pour $n = m$

On a donc (fig. 1) :

$$k = (H_0 - X)(Y + 0) = (H_1 - X)(Y + 1) = (H_m - X)(Y + m)$$

donc : $\quad Y(H_0 - H_1) = (H_1 - X)$

et $\quad Y(H_0 - H_m) = m(H_m - X)$

Divisant et séparant X, il vient :

$$X = \frac{(H_0 - H_1)\, m\, H_m - H_1 (H_0 - H_m)}{(H_0 - H_1)\, m - (H_0 - H_m)}$$

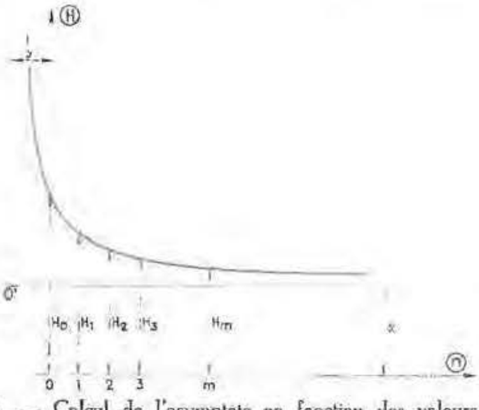


Fig. 1. — Calcul de l'asymptote en fonction des valeurs successives des pressions suivant les hypothèses sur la valeur de n.

Quatrième stade.

Les calculs à la règle laissent subsister une indétermination sur la 3^{me} décimale. Lors du calcul des débits, on trouve des écarts aux sommets de 1 à 2 %. La toilette de la solution se fait en partant d'abord de l'entrée du réseau, en chaque sommet les courants sortants diffèrent des entrants d'un certain μ que l'on distribue, changé de signe, selon formule des corrections proportionnelles :

$$C' = C\left(1 + \frac{\mu}{C + D}\right)$$

A étant par exemple le courant avant et C + D après :

$$\mu = A - C - D$$

Sans tenir compte de cette première série de corrections, on recommence par l'autre extrémité (sortie) et fait la moyenne des deux séries de corrections. Les courants sont alors normalisés.

II. — Méthode de réduction d'un réseau électrique.

Rappelons d'abord brièvement comment on peut réduire un réseau électrique.

Au lieu d'employer les symboles courants : $E = R.I$, nous adopterons immédiatement ceux qui seront ultérieurement utilisés en ventilation : $H = R.Q$.

Dans un tel réseau, on peut appliquer la loi d'Ohm et les lois de Kirchhoff. Quand le réseau est simple, c'est-à-dire ne présente que des branchements parallèles ou en série mais sans présenter de mailles, les formules de réduction sont bien connues; les résistances de deux branchements *en série* peuvent être additionnées, tandis que les inverses des résistances de deux branchements *en parallèle* s'additionnent pour donner l'inverse de la résistance d'un branchement unique équivalent.

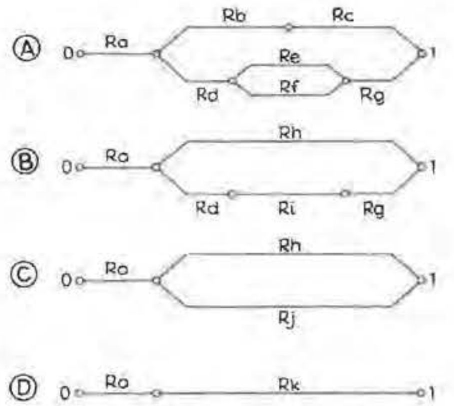


Fig. 2. — Réduction d'un réseau électrique simple.

Traitons un exemple; soit le réseau représenté en A (fig. 2).

Celui-ci se transforme dans le réseau B, dans lequel :

$$R_h = R_b + R_c \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f}$$

$$\text{soit} \quad \frac{R_f + R_e}{R_e . R_f} = \frac{1}{R_i} \qquad \text{soit} \quad R_i = \frac{R_e . R_f}{R_e + R_f}$$

Le réseau B se transforme en C (fig. 2) dans lequel :

$$R_j = R_d + R_i + R_g$$

Finalement, le réseau C donne le réseau D (fig. 2) dans lequel :

$$R_k = \frac{R_j . R_h}{R_j + R_h} \qquad \text{et} \qquad R_{total} = R_a + R_k$$

Dans un réseau maillé, la réduction se fait au moyen des formules de Kennelly : on remplace une étoile par un triangle équivalent, faisant ainsi sauter les nœuds les uns après les autres. Une étoile ABCD peut être remplacée par un triangle ABD (fig. 3) dans le réseau à condition de choisir les résistances R_{AB}, R_{BD} et R_{AD} de telle sorte que les potentiels en A, B et D ne soient pas changés et que les courants qui entrent ou sortent de A, B et D restent les mêmes.

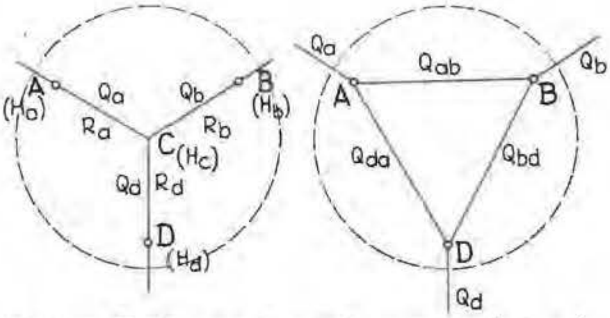


Fig. 3. — Transformation d'une étoile en un triangle équivalent en électricité.

Il suffit d'exprimer les lois d'Ohm et de Kirchhoff pour ces points pour trouver ces résistances R_{AB}, R_{BD} et R_{AD} en fonction des résistances connues R_a, R_b et R_d de l'étoile.

On convient que les courants convergeant vers le centre sont positifs, ceux qui s'en écartent négatifs. Il est évident que l'un des courants de l'étoile doit être négatif.

Considérons d'abord celle-ci :

Par la loi d'Ohm :

$$H_a - H_c = R_a Q_a$$
$$H_b - H_c = R_b Q_b$$
$$H_d - H_c = R_d Q_d$$

D'après la première loi de Kirchhoff, la somme algébrique des courants aboutissant en C est nulle

$$\frac{H_a - H_c}{R_a} + \frac{H_b - H_c}{R_b} + \frac{H_d - H_c}{R_d} = 0$$

Cette équation permet de tirer H_c :

$$\frac{H_a}{R_a} - \frac{H_c}{R_a} + \frac{H_b}{R_b} - \frac{H_c}{R_b} + \frac{H_d}{R_d} - \frac{H_c}{R_d} = 0$$

$$H_c . [\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d}] = \frac{H_a}{R_a} + \frac{H_b}{R_b} + \frac{H_c}{R_c}$$

que l'on peut écrire :

$$H_c = \frac{\Sigma\,(H/R)}{\Sigma\,(1/R)} \qquad (1)$$

Considérons maintenant un sommet du triangle; soit A; la même loi de Kirchhoff donne :

$$Q_a + Q_{DA} - Q_{AB} = 0$$

En appliquant la loi d'Ohm, elle devient :

$$\frac{H_a - H_c}{R_a} + \frac{H_d - H_a}{R_{DA}} = \frac{H_a - H_b}{R_{AB}}$$

Et à cause de (1) :

$$\frac{H_a}{R_a} - \frac{1}{R_a} \frac{\Sigma(H/R)}{\Sigma(1/R)} = \frac{H_a - H_b}{R_{AB}} + \frac{H_a - H_d}{R_{AD}}$$

$$\frac{1}{R_a \Sigma(1/R)} (H_a . \Sigma \frac{1}{R} - \Sigma \frac{H}{R}) = \frac{H_a - H_b}{R_{AB}} + \frac{H_a - H_d}{R_{AD}}$$

$$\frac{1}{R_a \Sigma(1/R)} (\frac{H_a}{R_a} + \frac{H_a}{R_b} + \frac{H_a}{R_c} - \frac{H_a}{R_a} - \frac{H_b}{R_b} - \frac{H_d}{R_d}) = \frac{H_a - H_b}{R_{AB}} + \frac{H_a - H_d}{R_{AD}}$$

$$\frac{1}{R_a \Sigma(1/R)} (\frac{H_a}{R_b} + \frac{H_a}{R_c} - \frac{H_b}{R_b} - \frac{H_d}{R_d}) - \frac{H_a - H_b}{R_{AB}} - \frac{H_a - H_d}{R_{AD}} = 0$$

$$\frac{1}{R_a \Sigma(1/R)} (\frac{H_a - H_b}{R_b} + \frac{H_a - H_d}{R_d}) - \frac{H_a - H_b}{R_{AB}} - \frac{H_a - H_d}{R_{AD}} = 0$$

$$(H_a - H_b)(\frac{R_a \Sigma(1/R)}{R_{AB}} - \frac{1}{R_b}) + (H_a - H_d)(\frac{R_a \Sigma(1/R)}{R_{AD}} - \frac{1}{R_d}) = 0$$

Ceci doit être vrai quels que soient H_a, H_b et H_d; il faut donc :

$$\frac{R_a \Sigma(1/R)}{R_{AB}} - \frac{1}{R_b} = 0$$

et

$$\frac{R_a \Sigma(1/R)}{R_{AD}} - \frac{1}{R_d} = 0$$

c'est-à-dire :

$$R_{AB} = R_b . R_a \Sigma(1/R)$$
$$R_{AD} = R_d . R_a \Sigma(1/R)$$

c'est-à-dire :

$$R_{AB} = R_b . R_a (\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d})$$

ou $$R_{AB} = R_b . R_a \frac{R_b . R_d + R_a . R_d + R_b . R_a}{R_a . R_b . R_d}$$

ou $$R_{AB} = \frac{R_a . R_b + R_a . R_d + R_b . R_d}{R_d}$$

et $$R_{AD} = R_a . R_d \frac{R_b . R_d + R_a . R_d + R_b . R_a}{R_a . R_b . R_d}$$

ou $$R_{AD} = \frac{R_b . R_b + R_a . R_d + R_b . R_a}{R_b}$$

En faisant le calcul à un autre sommet B ou D, on aurait :

$$R_{BD} = \frac{R_a . R_b + R_a . R_d + R_b . R_d}{R_a}$$

On remarque que le numérateur est identique dans les trois formules, on peut le noter par $\Sigma R_a . R_b$; le dénominateur est la résistance de la branche opposée à la branche nouvelle calculée : à R_{AB} correspond R_d, à R_{BD} correspond R_a, à R_{AD} correspond R_b.

Ainsi, d'une façon générale :

$$R_{ab} = \frac{\Sigma R_a . R_b}{R_d} \qquad (2)$$

Dans certains cas, il peut être utile de créer un sommet fictif pour en supprimer trois autres; on utilise alors les formules inverses faciles à trouver :

$$R_a = \frac{R_{ab} . R_{ad}}{R_a + R_b + R_d} \qquad (3)$$

Le numérateur est permutable, le dénominateur est constant.

III. — Exemple de calcul d'un réseau de ventilation.

A. — Etablissement du réseau pour le calcul.

Soit le réseau représenté à la figure 4 (1), les résistances y sont données en Weisbach; on con-

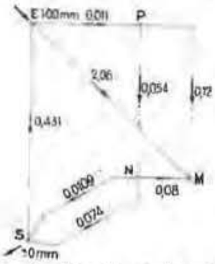


Fig. 4. — Exemple d'un réseau de ventilation maillé.

(1) *Bergbautechnik*, juillet 1956.

naît la pression en E égale à 100 mm d'eau et la pression en S égale à 0 mm d'eau.

Le débit sur le branchement ES peut être directement déterminé :

$$Q'_{ES} = \sqrt[2]{100/0{,}431} = 15{,}23 \text{ m}^3/\text{sec}$$

Nous n'en parlerons qu'à la fin du calcul.

Remplaçons les deux résistances parallèles entre S et N par une seule résistance équivalente : en ventilation, on a :

$$\underset{\text{composé}}{Q} = \sqrt{H/R_c} = \sqrt{H/R_a} + \sqrt{H/R_b}$$

divisant par H, il vient :

$$\sqrt{1/R_c} = \sqrt{1/R_a} + \sqrt{1/R_b}$$

$$= \frac{\sqrt{R_b} + \sqrt{R_a}}{\sqrt{R_a} \cdot \sqrt{R_b}}$$

élevant au carré et prenant les inverses :

$$\underset{\text{composé}}{R} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + 2\sqrt{R_a \cdot R_b}}$$

Ici $R_c =$

$$\frac{0{,}0109 \times 0{,}074}{0{,}0109 + 0{,}074 + 2\sqrt{0{,}0109 \times 0{,}074}} = 0{,}0057$$

Pour ne pas travailler sur des chiffres si petits, remarquons qu'en électricité (où $Q = H/R$) aussi bien qu'en ventilation (où $Q = \sqrt{H/R}$), si on multiplie simultanément résistances et pressions par une même valeur, les débits ne changent pas, on peut donc multiplier les résistances et les pressions par 10.

Enfin, rien ne nous empêche de représenter P de l'autre côté de EM, on arrive ainsi au schéma simplifié de la figure 5.

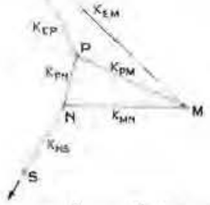


Fig. 5. — Schéma du réseau de ventilation, prêt pour le calcul.

B. — Calcul du réseau suivant la méthode directe.

Comme le calcul se déroule par des résolutions successives du réseau considéré comme du premier degré dans lequel les résistances seules changent, il est plus aisé de le présenter en tableau; les explications des calculs figurent dans la première colonne. Elles se réfèrent à chacune des colonnes suivantes. Le calcul se déroule colonne par colonne et non ligne par ligne. Les notes suivantes complètent l'explication du calcul développé dans la première colonne.

1) *Calcul des résistances de départ.*

Dans la première hypothèse, les résistances k sont connues; dans les autres approximations, elles sont calculées d'après les formules indiquées dans chaque colonne.

2) *Transformation de l'étoile en triangle.*

Les formules de Kennelly développées ci-dessus sont appliquées ici; on a appelé λ le produit des deux résistances, l'indice est celui du nœud opposé aux deux branchements; ce terme λ sera utilisé plus loin; S est la somme des termes λ (fig. 6).

3 et 4) *Combinaison des branchements parallèles.*

La formule est celle de l'électricité puisqu'on se trouve dans un système d'équations du premier degré (fig. 7 et 8).

5) *Calcul des pressions.*

La pression au nœud N s'obtient en rapportant les pressions en E et en S aux résistances entre EN et NS. Connaissant la pression en N, on peut calculer de même la pression au nœud M (fig. 7).

La pression en P s'obtient en écrivant que la somme des courants en P est nulle (fig. 5). Or, on a :

$$Q_{EP} = \frac{H_E - H_P}{R_{EP}}; \qquad Q_{MP} = \frac{H_M - H_P}{R_{MP}};$$

$$Q_{NP} = \frac{H_N - H_P}{R_{NP}}$$

on a donc :

$$\frac{H_E - H_P}{R_{EP}} + \frac{H_M - H_P}{R_{MP}} + \frac{H_N - H_P}{R_{NP}} = 0$$

ou

$$H_P \left[\frac{1}{R_{EP}} + \frac{1}{R_{MP}} + \frac{1}{R_{NP}}\right] = \frac{H_E}{R_{EP}} + \frac{H_M}{R_{MP}} + \frac{H_N}{R_{NP}}$$

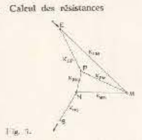
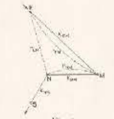
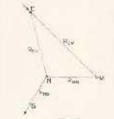
$$H_P \frac{R_{MP} \cdot R_{NP} + R_{EP} \cdot R_{NP} + R'_{EP} \cdot R_{MP}}{R_{EP} \cdot R_{MP} \cdot R_{NP}}$$

$$= \frac{H_E \cdot R_{MP} \cdot R_{NP} + H_M \cdot R_{EP} \cdot R_{NP} + H_N \cdot R_{EP} \cdot R_{MP}}{R_{EP} \cdot R_{MP} \cdot R_{NP}}$$

compte tenu de l'appellation λ, et de S, on obtient :

$$H_P (\lambda_E + \lambda_M + \lambda_N) = H_E \cdot \lambda_E + H_M \cdot \lambda_M + H_N \cdot \lambda_N$$

$$H_P = \frac{H_E \cdot \lambda_E + H_M \cdot \lambda_M + H_N \cdot \lambda_N}{S}$$

Explication du calcul	Première hypothèse $n = 0$	Deuxième hypothèse $n = 1$	Troisième hypothèse $n = 3$		
Formule générale du calcul :	$H_0 = K \cdot Q_0$	$H_1 = K\sqrt[2]{Q_0} \cdot Q_1$	$H' = K\sqrt[4]{Q_0} \cdot Q'$	$H'' = K\sqrt[4]{Q_0}\sqrt[4]{Q'}\, Q''$	$H_3 = K\sqrt[4]{Q_0} \cdot \sqrt[4]{Q'}\sqrt[4]{Q''} \cdot Q_3$
1. Calcul des résistances					
 Fig. 5.					
K_{EM}	20,60	$20,6\sqrt[2]{29,20} = 111,30$	$20,6\sqrt[4]{29,20} = 47,88$	$47,88\sqrt[4]{12,24} = 89,54$	$89,54\sqrt[4]{6,30} = 141,82$
K_{EP}	0,11	$0,11\sqrt[2]{1.677,73} = 4,51$	$0,11\sqrt[4]{1.677,73} = 0,70$	$0,70\sqrt[4]{285,70} = 2,89$	$2,89\sqrt[4]{75,13} = 8,52$
K_{PM}	1,20	$1,20\sqrt[2]{347,48} = 22,37$	$1,20\sqrt[4]{347,48} = 5,18$	$5,18\sqrt[4]{74,31} = 15,21$	$15,21\sqrt[4]{22,77} = 33,22$
K_{PN}	1,54	$1,54\sqrt[2]{1.330,25} = 19,69$	$1,54\sqrt[4]{1.330,25} = 3,26$	$3,26\sqrt[4]{211,52} = 12,44$	$12,44\sqrt[4]{52,91} = 33,54$
K_{MN}	0,80	$0,80\sqrt[2]{376,70} = 15,52$	$0,80\sqrt[4]{376,70} = 3,52$	$3,52\sqrt[4]{86,49} = 10,75$	$10,75\sqrt[4]{29,00} = 24,94$
K_{NS}	0,057	$0,057\sqrt[2]{1.706,17} = 2,35$	$0,057\sqrt[4]{1.706,17} = 0,37$	$0,37\sqrt[4]{297,95} = 1,52$	$1,52\sqrt[4]{81,83} = 4,58$
2. Transformation du réseau étoile-triangle (formules de Kennelly)					
 Fig. 6.					
$\lambda_N = K_{EP} \times K_{PM}$	$0,11 \times 1,20 = 0,1320$	$4,51 \times 22,37 = 100,7453$	$0,70 \times 5,18 = 3,6459$	$2,89 \times 15,21 = 44,0060$	$8,52 \times 33,22 = 283,0508$
$\lambda_M = K_{EP} \times K_{PN}$	$0,11 \times 0,54 = 0,0594$	$4,51 \times 19,69 = 88,7040$	$0,70 \times 3,26 = 2,2949$	$2,89 \times 12,44 = 35,9815$	$8,52 \times 33,54 = 285,6746$
$\lambda_E = K_{PM} \times K_{PN}$	$1,20 \times 0,54 = 0,6480$	$22,37 \times 19,69 = 440,3695$	$5,18 \times 3,26 = 16,8992$	$15,21 \times 12,44 = 189,1284$	$33,22 \times 33,54 = 1.114,3009$
S	0,8394	629,8118	22,8400	269,1159	1.683,0263
$r_{EM} = \frac{S}{K_{PN}}$	$\frac{0,8394}{0,54} = 1,554$	$\frac{629,8118}{19,69} = 31,983$	$\frac{22,84}{3,26} = 7,004$	$\frac{269,1159}{12,44} = 21,641$	$\frac{1.683,0263}{33,54} = 50,185$
$r_{MN} = \frac{S}{K_{EP}}$	$\frac{0,8394}{0,11} = 7,631$	$\frac{629,8118}{4,51} = 139,809$	$\frac{22,84}{0,70} = 32,452$	$\frac{269,1159}{2,89} = 93,007$	$\frac{1.683,0263}{8,52} = 197,561$
$r_{EN} = \frac{S}{K_{MN}}$	$\frac{0,8394}{1,20} = 0,699$	$\frac{629,8118}{22,37} = 28,161$	$\frac{22,84}{5,18} = 4,409$	$\frac{269,1159}{15,21} = 17,694$	$\frac{1.683,0263}{33,22} = 50,658$
3. Combinaison des branchements parallèles de E à M et de M à N					
 Fig. 7.					
$R_{EM} = \frac{K_{EM} \times r_{EM}}{K_{EM} + r_{EM}}$	$\frac{20,6 \times 1,554}{20,6 + 1,554} = 1,445$	$\frac{111,30 \times 31,983}{111,30 + 31,983} = 24,840$	$\frac{47,88 \times 7,004}{47,88 + 7,004} = 6,110$	$\frac{89,54 \times 21,641}{89,54 + 21,641} = 17,420$	$\frac{141,82 \times 50,185}{141,82 + 50,185} = 37,068$
$R_{MN} = \frac{K_{EM} \times r_{EM}}{K_{EM} + r_{EM}}$	$\frac{0,80 \times 7,631}{0,80 + 7,631} = 0,724$	$\frac{15,52 \times 139,809}{15,52 + 139,809} = 13,970$	$\frac{3,52 \times 32,452}{3,52 + 32,452} = 3,178$	$\frac{10,75 \times 93,007}{10,75 + 93,007} = 9,633$	$\frac{24,94 \times 197,561}{24,94 + 197,561} = 22,142$
$R_{EN} = R_{EM} + R_{MN}$	2,169	38,810	9,288	27,053	59,210
4. Combinaison des branchements parallèles de E à N					
 Fig. 8.					
$\varrho_{EN} = \frac{r_{EN} \times R_{EN}}{r_{EN} + R_{EN}}$	$\frac{0,698 \times 2,169}{0,698 + 2,169} = 0,529$	$\frac{28,161 \times 38,810}{28,161 + 38,810} = 16,319$	$\frac{4,409 \times 9,288}{4,409 + 9,288} = 2,990$	$\frac{17,694 \times 27,053}{17,694 + 27,053} = 10,697$	$\frac{50,658 \times 59,210}{50,658 + 59,210} = 27,300$
$\varrho_{ES} = K_{NS} + \varrho_{EN}$	$0,057 + 0,529 = 0,586$	$2,35 + 16,319 = 18,669$	$0,37 + 2,990 = 3,360$	$1,52 + 10,697 = 12,217$	$4,58 + 27,300 = 31,880$
5. Calcul des pressions					
$H_N = (H_E - H_S)\frac{K_{NS}}{\varrho_{NS}}$	$(1.000 - 0)\frac{0,057}{0,586} = $ **97,12**	$(1.000 - 0)\frac{2,35}{18,669} = $ **126,18**	$(1.000 - 0)\frac{0,37}{3,360} = 109,20$	$(1.000 - 0)\frac{1,52}{12,217} = 124,60$	$(1.000 - 0)\frac{4,58}{31,880} = $ **143,65**
$H_M = (H_E - H_N)\frac{R_{MN}}{R_{EN}} + H_E$	$(1.000 - 97,12)\frac{0,724}{2,169} + 97,12 = $ **398,48**	$(1.000 - 126,18)\frac{13,970}{38,810} + 126,18 = $ **440,72**	$(1.000 - 109,2)\frac{3,178}{9,288} + 109,2 = 413,99$	$(1.000 - 124,60)\frac{9,633}{27,053} + 124,60 = 436,31$	$(1.000 - 143,65)\frac{22,142}{59,210} + 143,65 = $ **463,89**
$H_P = \frac{H_E \cdot \lambda_E + H_M\lambda_M + H_N\lambda_N}{S} = \frac{s}{S}$ — $H_E\lambda_E$	$1.000 \times 0,648 = 648,000$	$1.000 \times 440,3695 = 440.369,50$	$1.000 \times 16,8992 = 16.899,20$	$1.000 \times 189,1284 = 189.128,40$	$1.000 \times 1.114,3009 = 1.114.300,9$
$H_M\lambda_M$	$398,48 \times 0,059 = 23,670$	$440,72 \times 88,704 = 39.093,62$	$413,99 \times 2,2949 = 950,07$	$436,31 \times 35,9815 = 15.999,09$	$463,89 \times 285,6746 = 132.518,88$
$H_N\lambda_N$	$97,12 \times 0,132 = 12,819$	$126,18 \times 100,7453 = 12.711,37$	$109,2 \times 3,6459 = 398,13$	$124,6 \times 44,006 = 5.483,15$	$143,65 \times 283,0508 = 40.660,28$
s	648,489	492.174,49	18.247,40	210.610,64	1.287.480,06
$H_P = s/S$	$\frac{684.489}{0,8394} = $ **815,45**	$\frac{492.174,49}{629,8118} = $ **781,46**	$\frac{18.247,40}{22,84} = 798,92$	$\frac{210.610,64}{269,1159} = 782,60$	$\frac{1.287.480,06}{1.683,0263} = $ **764,90**
6. Calcul des débits					
$Q_{EM} = \frac{H_E - H_M}{K_{EM}}$	$\frac{1.000 - 398,48}{20,60} = 29,20$	$\frac{1.000 - 440,72}{111,30} = 5,03$	$\frac{1.000 - 413,99}{47,88} = 12,24$	$\frac{1.000 - 436,31}{89,54} = 6,30$	$\frac{1.000 - 463,89}{141,82} = 3,78$
$Q_{EP} = \frac{H_E - H_P}{K_{EP}}$	$\frac{1.000 - 815,45}{0,11} = 1.677,73$	$\frac{1.000 - 781,46}{4,51} = 48,51$	$\frac{1.000 - 798,92}{0,70} = 285,70$	$\frac{1.000 - 782,6}{2,89} = 75,13$	$\frac{1.000 - 764,9}{8,52} = 27,60$
$Q_{PM} = \frac{H_P - H_M}{K_{PM}}$	$\frac{815,45 - 398,48}{1,20} = 347,48$	$\frac{781,46 - 440,72}{22,37} = 15,24$	$\frac{798,92 - 413,99}{5,18} = 74,31$	$\frac{782,6 - 436,31}{15,21} = 22,77$	$\frac{764,9 - 463,89}{33,22} = 9,06$
$Q_{PN} = \frac{H_P - H_N}{K_{PN}}$	$\frac{815,45 - 97,12}{0,54} = 1.330,25$	$\frac{781,46 - 126,18}{19,69} = 33,28$	$\frac{789,92 - 109,2}{3,26} = 211,52$	$\frac{782,6 - 124,6}{12,44} = 52,91$	$\frac{764,9 - 143,65}{33,54} = 18,53$
$Q_{MN} = \frac{H_M - H_N}{K_{MN}}$	$\frac{398,48 - 97,12}{0,80} = 376,70$	$\frac{440,72 - 126,18}{15,52} = 20,26$	$\frac{413,99 - 109,2}{3,52} = 86,49$	$\frac{436,31 - 124,6}{10,75} = 29,00$	$\frac{463,89 - 143,65}{24,94} = 12,84$
$Q_{NS} = \frac{H_N - H_S}{K_{NS}}$	$\frac{97,12 - 0}{0,057} = 1.706,17$	$\frac{126,18 - 0}{2,35} = 53,54$	$\frac{109,2 - 0}{0,37} = 297,95$	$\frac{124,6 - 0}{1,52} = 81,83$	$\frac{143,65 - 0}{4,58} = 31,36$
$Q_{total} = \frac{H_E - H_S}{\varrho_{ES}}$	$\frac{1.000 - 0}{0,586} = 1.706,77$	$\frac{1.000 - 0}{18,669} = 53,54$	$\frac{1.000 - 0}{3,36} = 297,95$	$\frac{1.000 - 0}{12,217} = 81,83$	$\frac{1.000 - 0}{31,88} = 31,36$
7. Vérification					
$Q_{tot} = Q_{NS} = Q_{EM} + Q_{EP}$	$1.706,77 \approx 1.706,17 \approx 1.706,93$	$53,54 \approx 53,54 \approx 53,54$	$297,95 \approx 297,95 \approx 297,94$	$81,83 \approx 81,83 \approx 81,43$	$31,36 \approx 31,36 \approx 31,38$
$Q_{EP} = Q_{PM} + Q_{PN}$	$1.677,73 \approx 1.677,73$	$48,51 \approx 48,52$	$285,70 \approx 285,83$	$75,13 \approx 75,68$	$27,60 \approx 27,59$
$Q_{MN} = Q_{EM} + Q_{PM}$	$376,70 \approx 376,68$	$20,26 \approx 20,27$	$86,49 \approx 86,55$	$29,00 \approx 29,07$	$12,84 \approx 12,84$
$Q_{NS} = Q_{MN} + Q_{PN}$	$1.706,77 \approx 1.706,95$	$53,54 \approx 53,54$	$297,95 \approx 298,01$	$81,83 \approx 81,91$	$31,36 \approx 31,37$

8. Calcul des pressions réelles

$$H = \frac{(H_0 - H_1)\, m \cdot H_m - (H_0 - H_m)\, H_1}{(H_0 - H_1)\, m - (H_0 - H_m)}$$

où : H_0 = pressions pour $n = 0$
H_1 = pressions pour $n = 1$
H_m = pressions pour $n = m$

ici : $m = 3$.

H_N: $$\frac{(97,12 - 126,18) \times 3 \times 143,65 - (97,12 - 143,65) \times 126,18}{(97,12 - 126,18) \times 3 - (97,12 - 143,65)} = \frac{-29,02 \times 3 \times 143,65 - 46,49 \times 126,18}{-29,02 \times 3 + 46,49} = \frac{6.640,06}{40,57} = \mathbf{163,67}$$

H_M: $$\frac{(398,48 - 440,72) \times 3 \times 463,89 - (398,48 - 463,89) \times 440,72}{(398,48 - 440,72) \times 3 - (398,48 - 463,89)} = \frac{-42,24 \times 3 \times 463,89 + 65,41 \times 440,72}{-42,24 + 65,41} = \frac{29.901,19}{61,31} = \mathbf{487,69}$$

H_P: $$\frac{(815,45 - 781,46) \times 3 \times 764,90 - (815,45 - 764,90) \times 781,46}{(815,45 - 781,46) \times 3 - (815,45 - 764,90)} = \frac{33,99 \times 3 \times 764,90 - 50,55 \times 781,46}{33,99 \times 3 - 50,55} = \frac{38.494,05}{51,42} = \mathbf{748,62}$$

9. Calcul des débits réels et vérification

$Q_{EM} = \sqrt[2]{\frac{H_E - H_M}{K_{EM}}}$	$\sqrt[2]{\frac{1.000 - 478,69}{20,60}} = $ **4,98**	
$Q_{EP} = \sqrt[2]{\frac{H_E - H_P}{K_{EP}}}$	$\sqrt[2]{\frac{1.000 - 748,62}{0,11}} = $ **47,80**	
$Q_{PM} = \sqrt[2]{\frac{H_P - H_M}{K_{PM}}}$	$\sqrt[2]{\frac{748,62 - 487,69}{1,20}} = $ **14,75**	
$Q_{PN} = \sqrt[2]{\frac{H_P - H_N}{K_{PN}}}$	$\sqrt[2]{\frac{748,62 - 163,67}{0,54}} = $ **32,91**	
$Q_{MN} = \sqrt[2]{\frac{H_M - H_N}{K_{MN}}}$	$\sqrt[2]{\frac{487,69 - 163,67}{0,80}} = $ **20,12**	
$Q'_{NS} = \sqrt[2]{\frac{H_N - H_S}{K'_{NS}}}$	$\sqrt[2]{\frac{163,67 - 0}{0,109}} = $ **38,75**	
$Q''_{NS} = \sqrt[2]{\frac{H_N - H_S}{K''_{NS}}}$	$\sqrt[2]{\frac{163,67 - 0}{0,74}} = $ **14,87**	
$Q_{ES} = \sqrt[2]{\frac{H_E - H_S}{K'_{ES}}}$	$\sqrt[2]{\frac{1.000 - 0}{4,31}} = $ **15,23**	

1) débit entrant $= Q_{EM} + Q_{EP} + Q_{ES} = 4,98 + 47,80 + 15,23 = 68,01$
débit sortant $= Q'_{NS} + Q''_{NS} + Q_{ES} = 38,75 + 14,87 + 15,23 = 68,85$ — écart 0,84

2) somme des débits au nœud P :
débit entrant : $Q_{EP} = 47,80$
débit sortant : $Q_{PM} + Q_{PN} = 14,75 + 32,91 = 47,66$ — écart 0,14

3) somme des débits au nœud M :
débit entrant : $Q_{EM} + Q_{PM} = 4,98 + 14,75 = 19,73$
débit sortant : $Q_{MN} = 20,12$ — écart 0,39

4) somme des débits au nœud N :
débit entrant : $Q_{PN} + Q_{MN} = 32,91 + 20,12 = 53,03$
débit sortant : $Q'_{NS} + Q''_{NS} = 38,75 + 14,87 = 53,63$ — écart 0,60

6) *Calcul des débits.*

Les débits sont calculés comme en électricité, soit du type $Q = P/R$. Les débits Q_0 sont reportés dans le calcul des résistances des hypothèses suivantes. Il en est de même des débits provisoires Q' et Q'' de la troisième hypothèse. Il n'est pas nécessaire de calculer les débits Q_1.

7) *Vérification.*

On a obtenu les débits en partant de l'application de la loi d'Ohm sur le réseau, mais les débits doivent satisfaire à la loi de Kirchhoff : celle-ci peut être vérifiée aux différents nœuds. On s'aperçoit que les erreurs sont très peu importantes, surtout dans les approximations $n = 1$ et $n = 3$. On gagne en précision en faisant $n = 5$ au lieu de 3, mais les calculs s'allongent.

8) *Calcul des pressions réelles.*

On applique la formule obtenue en faisant l'hypothèse que les résultats des différentes hypothèses forment une hyperbole équilatère et en cherchant l'asymptote pour les pressions à chaque nœud.

9) *Calcul des débits réels et vérification.*

Puisqu'on connaît les pressions en chaque nœud et les résistances de chaque branchement, il est aisé de calculer les débits puisque l'on connaît la relation entre ces paramètres. On applique évidemment la formule de ventilation, soit $H = R \cdot Q^2$.

Ces débits doivent vérifier la loi de Kirchhoff. On procède ainsi à la vérification des résultats.

C. — *Correction des débits.*

Ainsi qu'on l'a indiqué, on peut faire la toilette de la solution en établissant, depuis l'entrée ou depuis la sortie, l'égalité des débits entrants et des débits sortants. Dans le calcul suivant, on partira de la moyenne arithmétique des débits sortant de E et entrant à S (fig. 5).

1) $\left.\begin{array}{l}\text{débit entrant : } 4{,}98 + 47{,}80 + 15{,}23 = 68{,}01 \\ \text{débit sortant : } 14{,}87 + 38{,}75 + 15{,}23 = 68{,}85\end{array}\right\}$ moyenne : 68,43

2) *Correction en E* : EM + EP + ES = 68,43 au lieu de 68,01, écart total : + 0,42.

$$Q_{EM} = 4{,}98 + 0{,}42 \cdot \frac{4{,}98}{68{,}01} = 4{,}98 + 0{,}031 = 5{,}01 \approx 5{,}0$$

$$Q_{EP} = 47{,}80 + 0{,}42 \cdot \frac{47{,}80}{68{,}01} = 47{,}80 + 0{,}295 = 48{,}09 \approx 48{,}1$$

$$Q_{ES} = 15{,}23 + 0{,}42 \cdot \frac{15{,}23}{68{,}01} = 15{,}23 + 0{,}094 = 15{,}32 \approx 15{,}3$$

3) *Correction en P* : PM + PN = 48,09 au lieu de 47,66, écart total : + 0,43.

$$Q_{PM} = 14{,}75 + 0{,}43 \cdot \frac{14{,}75}{47{,}66} = 14{,}75 + 0{,}133 = 14{,}88 \approx 14{,}9$$

$$Q_{PN} = 32{,}93 + 0{,}43 \cdot \frac{32{,}91}{47{,}66} = 32{,}91 + 0{,}297 = 33{,}21 \approx 33{,}2$$

4) *Correction en M* : MN = 5,01 + 14,88 = 19,89 au lieu de 20,12, écart : — 0,23.

$$Q_{MN} = 20{,}12 - 0{,}23 = 19{,}89 \approx 19{,}9$$

5) *Correction en N* : (NS)' + (NS)'' = 33,21 + 19,89 = 53,10 au lieu de 53,62, écart total : — 0,52.

$$Q_{(NS)''} = 14{,}87 - 0{,}52 \cdot \frac{38{,}75}{53{,}62} = 38{,}75 - 0{,}376 = 38{,}37 \approx 38{,}4$$

$$Q_{(NS)'} = 38{,}75 - 0{,}52 \cdot \frac{14{,}87}{53{,}62} = 14{,}87 - 0{,}144 = \underline{14{,}73} \approx 14{,}7$$

$$53{,}10$$

IV. — Conclusion.

Cette méthode de calcul est sans doute encore susceptible de perfectionnements et de nouveaux développements. Il nous a cependant paru utile de la faire connaître, malgré ses imperfections, pour qu'elle subisse la critique des théoriciens et l'épreuve des praticiens.

On peut en résumer ainsi les avantages :

1) possibilité de calcul, à la règle ou à la machine à calculer à 4 opérations, d'un réseau de ventilation quelconque avec obtention du résultat exact avec des calculs simples et courts;
2) en cas d'utilisation d'un analogue électrique, suppression totale des tâtonnements pour obtenir les résistances variables avec l'intensité du courant : il suffit de calculer les résistances dans chaque hypothèse et de mesurer les débits et les potentiels;
3) le calcul est susceptible d'être « ordonné » très facilement — la présentation qui en a été faite le montre bien —; il peut donc être entrepris sur un ordinateur;
4) enfin, mis à part l'établissement des résistances, à chaque hypothèse, le calcul consiste en une série d'additions et de multiplications; il ne paraît pas impossible, à première vue, de l'exécuter sur des machines à cartes perforées traditionnelles.