# ETUDE D'ANNEAUX CIRCULAIRES A FORTE COURBURE RELATIVE SOLLICITES PAR DEUX FORCES DIAMETRALEMENT OPPOSEES

PAR

**Louis BLANJEAN,**

Ingénieur Civil Mécanicien et Electricien (A. I. Br.),
Chargé de Recherches du Fonds National de la Recherche Scientifique.

---

## TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION . . . . . 779

Bibliographie . . . . . 781

Notations principales employées dans cette note . . . . 785

I. — ETUDE THEORIQUE.

2. Généralités . . . . . 785

3. Conventions de signes . . . . . 785

A. — *Théorie des pièces à forte courbure relative, sollicitées par flexion plane composée. — Méthode basée sur la résistance des matériaux*

4. Définition du cas et hypothèses . . . . . 786

5. Mise en équation de l'expression de $\sigma_x$ . . . . . 786

6. Pièces à forte courbure non fléchies ou sollicitées par traction ou compression simple . . . . . 797

7. Expressions particulières de I' et de $\rho'$ . . . . . 797
Section circulaire, elliptique, rectangulaire, trapèze.

B. — *Application de la méthode de la résistance des matériaux à l'étude d'un maillon de chaine elliptique ou circulaire, sollicité par deux forces égales et diamétralement opposées.*

8. *a)* Equations de départ dans le cas général . . . . 802

9. *b)* Cas particulier de l'anneau circulaire à section transversale circulaire constante (anneau rond, section ronde) . . . . . 805

1°) Etude des moments fléchissants . . . . . 805

2°) Diagramme des tensions normales circonférentielles aux diverses sections transversales de l'anneau . . . . . 808

3°) Etude des déformations . . . . . 811

Calcul de $f_A$, variation du diamètre suivant lequel sont appliquées les charges F . . . . 811

Calcul de $f_B$, variation du diamètre transversal aux charges . . . . . 814

C. — *Etude de l'anneau circulaire de section transversale constante rectangulaire, par la théorie de l'élasticité.*

10. Introduction . . . . . 817

11. Généralités . . . . . 818

12. Cas de l'anneau circulaire, sollicité par deux forces diamétralement opposées le soumettant dans son ensemble à traction . . . . . 820

Calcul des tensions; formules générales . . . . 820

13. Relations directement utiles au point de vue technique. 821

14. Calcul du moment fléchissant $M_A$. — Remarque . . 823

15. Position théorique du point d'inflexion . . . . . 826

16. *Exemple d'application des formules données par la théorie de l'élasticité* . . . . . 827

17-18-19. D. — *Etude de la tension maximum de la zone même de contact de la charge* . . . . 829



II. — CONTROLE PHOTO-ELASTIQUE DE CERTAINS RESULTATS OBTENUS PAR LE CALCUL.

20. A) Introduction . . . . . 833

21. B) Rappel des caractères de la région des points d'inflexion . . . . . 834

22. Expression générale des tensions . . . . . 834

23. Courbes isochromatiques ou d'extinction . . . . . 837

24. C) Trajectoires des tensions principales ou lignes isostatiques . . . . . 857

25-26. D) Obtention expérimentale des diagrammes des tensions circonférentielles sur les bords intrados et extrados de l'anneau . . . . . 861

27-28. E) Obtention expérimentale du diagramme des tensions normales dans la section transversale de l'anneau située suivant le diamètre normal à la direction des charges extérieures . . . . . 873

29-33. F) Résumé des résultats acquis par le contrôle des anneaux par la photo-élasticité . . . . . 876

34. III. RELATIONS DES ESSAIS EFFECTUES SUR ANNEAUX RONDS EN FER OU EN ACIER.

35. Caractéristiques des séries d'anneaux essayés :

1°) Métaux utilisés . . . . . 881

2°) Résultats des essais . . . . . 883

36. Description de l'essai d'un des anneaux . . . . . 886

IV. — RESUME ET CONCLUSIONS PRATIQUES.

39. A) Formules et nomogrammes d'application technique . 895

40. B) Tension d'utilisation admissible. Analyse de la situation actuelle . . . . . 902

41. C) Solution à adopter pour les anneaux ronds. — Bases logiques de cette solution . . . . . 905

42. D) Conclusion . . . . . 906

Tableau des valeurs caractéristiques utiles des principaux métaux employés pour les anneaux . . 907

ANNEXE I.

43. Formules des anneaux circulaires sollicités par deux forces diamétralement opposées, appliquées soit à l'intrados, soit à l'extrados et supposées, d'une part, uniformément réparties sur un certain arc et, d'autre part, concentrées. 909

44. Quatre cas particuliers . . . . . 910

ANNEXE II.

45. Application de la méthode de la résistance des matériaux à l'étude du maillon circulaire étançonné sollicité par deux forces diamétralement opposées . . . 915



# INTRODUCTION(1)

1. — L'étude est faite dans le but de préciser les limites et les conditions d'application pratiques au problème des anneaux circulaires, des formules données, d'une part, par l'application de la théorie classique de la résistance des matériaux et, d'autre part, par l'application de la théorie de l'élasticité.

L'étude comprend quatre sections :

I. *Etude théorique* : établissement des formules des tensions et des déformations par la théorie classique de la résistance des matériaux; établissement des formules des tensions par la théorie de l'élasticité; comparaison des deux méthodes.

II. *Etude expérimentale* : contrôles par la photo-élasticité.

III. *Etude expérimentale technique* : essais effectués sur un lot d'anneaux en fer ou en acier.

IV. *Conclusions pratiques et résumé.*

(1) Cette étude a été faite au laboratoire de Photo-élasticité et de Résistance des Matériaux de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Bruxelles, dirigé par M. le Professeur Baes. Les essais sur anneaux circulaires en acier ont été effectués à la suggestion de l'« Association des Industriels de Belgique », en vue de préciser les conditions de sécurité à exiger actuellement pour ces éléments, qui jouent un rôle important dans de nombreuses applications industrielles.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] 1913. Hans LORENZ. — Lehrbuch der Technischen Physik; Band IV, Technische Elastizitätslehre; München und Berlin, R. Oldenbourg.

[2] 1921. Arthur MORLEY. — Strength of Materials; London, Longman, Green and Co.

[3] 1922. E. G. COKER. — Curved Beams, Rings and Chain Links; London, The Junior Institution of Engineers.

[4] 1924. Louis N. G. FILON. — The Stresses in a Circular Ring; London, The Institution of Civil Engineers.

[5] 1925. S. TIMOSHENKO and J. M. Lessels. — Applied Elasticity; East Pittsburg, Pa., Westinghouse Technical Night School Press.

[6] 1930. A. MESNAGER. — Essai sur le Tracé des Lignes Isostatiques dans les Problèmes à Deux Dimensions; Premier Congrès International du Béton et du Béton Armé, Liége 1930, volume I, pages 200 à 204; Liége et Paris, La Technique des Travaux.

[7] 1930. Georg BELL. — Theorie und Versuche über Einige Fälle von Spannungsverteilung in Ringförmige Körper; Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 10, pages 52 à 72; Berlin, V.D.I. Verlag.

[8] 1930-34. Louis BAES. — Résistance des Matériaux et Eléments de la Théorie de l'Elasticité et de la Plasticité des Corps Solides; Tome I, Principes Généraux et Cas Spéciaux Importants; Bruxelles, Maurice Lamertin.

[9] 1931. E. G. COKER and L. N. G. FILON. — A Treatise on Photoelasticity; Cambridge, University Press.

[10] 1935. L. BAES et F. TEMMERMAN. — Etats de Tension à Deux Dimensions, Types Fondamentaux de Points Singuliers du Réseau des Trajectoires de Tensions Principales: Comptes-Rendus du 2e Congrès National des Sciences, pages 1144 à 1156; Bruxelles, M. Hayez.

[11] 1935. Fritz TEMMERMAN. — Contribution à l'Etude des Singularités des Lignes Caractéristiques des Etats de Tension à Deux Dimensions; Comptes-Rendus du 2e Congrès National des Sciences, pages 1168 à 1177; Bruxelles, M. Hayez.

[12] 1936. V. TESAŘ. — Etude Expérimentale des Contraintes Produites dans une Poutre par des Charges Concentrées; Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, 4e volume, pages 543 à 571; Zurich, Secrétariat Général de l'Association.

[13] 1936. S. TIMOSHENKO. — Théorie de l'Elasticité; Paris et Liége, Ch. Béranger.

[14] 1937. ASSOCIATION BELGE DE STANDARDISATION. — Règlement pour la Construction des Charpentes Métalliques (Texte et Notes explicatives), 3e édition.

[15] 1937. Maurice BRICAS. — La Théorie de l'Elasticité Bidimensionnelle; Athènes, Imprimerie Pyrsos.

[16] 1937. Louis BLANJEAN et Fritz TEMMERMAN. — Etude de la Région Voisine du Point d'inflexion d'une Pièce Droite Prismatique en Flexion Plane; Bulletin de la Société Royale Belge des Ingénieurs et des Industriels, n° 9 de 1937, pages 851 à 864; Bruxelles.

NOTE. — Dans le texte qui suit, les ouvrages auxquels on se réfèrera seront repérés par les numéros précédents placés entre crochets.



## NOTATIONS PRINCIPALES EMPLOYEES DANS CETTE NOTE

*Dimensions caractéristiques des anneaux.*

$h$ : hauteur radiale d'un anneau;

$\rho$ : rayon du centre de gravité de la section transversale de l'anneau;

$\rho'$ : rayon du centre de gravité de la section transversale transformée de l'anneau;

$r_e$ : rayon de la fibre extrados de l'anneau;

$r_i$ : rayon de la fibre intrados de l'anneau;

$r$, $\alpha$ : coordonnées polaires d'un point courant de l'anneau, comptées respectivement à partir du centre de l'anneau, et à partir du diamètre transversal aux forces extérieures;

$\Omega$ : aire de la section transversale de l'anneau;

$\Omega'$ : aire de la section transversale transformée de l'anneau;

$I$ : moment d'inertie de la section transversale de l'anneau, par rapport à l'axe de gravité (de cette section) perpendiculaire au plan de l'anneau;

$I'$ : moment d'inertie de la section transversale transformée de l'anneau, par rapport à l'axe de gravité (de cette section) perpendiculaire au plan de l'anneau;

$\xi$ : coefficient de forme de la section de l'anneau, au point de vue de la déformation due aux efforts tranchants (1,20 pour une section rectangulaire, et $32/37 = 1{,}185$ pour une section circulaire);

$z'$ : distance radiale entre la fibre courante et la fibre de rayon $\rho'$, prise comme repère, (comptée positive vers l'extrados et négative vers l'intrados).

*Données relatives à la matière.*

E : module d'élasticité longitudinal;

G : module d'élasticité de glissement ou transversal;

*Données relatives à la sollicitation.*

F : force extérieure sollicitant l'anneau (positive si c'est une traction);

$M'_a$ : moment fléchissant relatif à la section d'angle polaire $\alpha$, compté positif s'il tend à diminuer le rayon de courbure (augmenter la courbure);

$N_a$ : effort normal relatif à cette section, compté positif si c'est une traction;

$\sigma_r$ : tension normale aux facettes orientées perpendiculairement à la direction radiale;

$\sigma_a$ : tension normale aux facettes radiales, ou tension circonférentielle;

$\tau_{ra}$, $\tau_{ar}$ : tensions tangentielles agissant respectivement sur les facettes précédentes.

---



# I. - ETUDE THEORIQUE

## 2. — GENERALITES.

Tant que le rapport $\rho/h$ du rayon de courbure de la fibre moyenne de l'anneau et de la hauteur radiale $h$ de la section transversale est suffisamment grand (voir les théories ci-après), le problème peut être étudié par la théorie ordinaire de la flexion plane des pièces à forte courbure relative.

La première partie de l'étude théorique, c'est-à-dire les §§ 4 à 7, présente la théorie ordinaire telle qu'elle est enseignée déjà depuis de nombreuses années dans les Universités belges, et notamment par M. le Professeur Baes, au cours de résistance des matériaux de l'Université de Bruxelles (1).

Ainsi qu'il sera montré ultérieurement, lorsque le rapport $\rho/h$ est moindre que 2, c'est-à-dire lorsque la courbure relative est forte, la théorie ordinaire est défavorable, c'est-à-dire que les tensions calculées par cette théorie sont supérieures aux tensions réelles. Il faut alors étudier l'anneau par la théorie de l'élasticité. La méthode de calcul basée sur la théorie de l'élasticité est fort peu connue, aussi est-il utile de résumer cette méthode et surtout d'en dégager les résultats les plus importants susceptibles de rendre de grands services dans les applications techniques.

## 3. — CONVENTIONS DE SIGNES.

Dans l'étude des tensions et des déformations, l'effort longitudinal N est pris positif, si c'est un effort de traction, et le moment fléchissant M est considéré positif quand il tend à augmenter la courbure.

---

(1) Nous avons cru utile de publier ici cette théorie, car nous avons pu constater combien le calcul des pièces à forte courbure relative est encore souvent mené de manière tout à fait incorrecte ou par des théories plus anciennes, conduisant à des formules plus lourdes à manier que celles auxquelles aboutit la théorie exposée ci-après.

## A. — THEORIE DES PIECES A FORTE COURBURE RELATIVE, SOLLICITEES PAR FLEXION PLANE COMPOSEE

*Méthode basée sur la résistance des matériaux.*

### 4. — DEFINITION DU CAS.

Le rapport $\rho/h$ du rayon de courbure $\rho$ de la fibre moyenne et de la hauteur radiale $h$ de la section transversale est assez grand pour ne pas exiger l'application de la théorie de l'élasticité, mais n'est pas assez grand pour permettre d'utiliser les formules de la flexion des pièces droites donnant les tensions.

*Hypothèses relatives au calcul des tensions normales $\sigma_x$ :*

Ces hypothèses sont les mêmes que dans l'étude de la flexion des pièces longues, droites :

a) La pièce peut être considérée comme une pièce longue;

b) La défiguration des sections transversales, et notamment les déformations radiales, peuvent être négligées;

c) Le calcul des tensions $\sigma_x$ se fait en admettant que les sections transversales et planes avant flexion le restent après déformation;

d) Les tensions $\sigma_y$ et $\sigma_z$ sont négligeables, de sorte que dans les limites de l'élasticité, les tensions $\sigma_x$ sont proportionnelles aux dilatations $\delta_x$.

### 5. — MISE EN EQUATION DE L'EXPRESSION DE $\sigma_x$ (fig. 1).

Etudions une fibre quelconque $AA_1$, cherchons le $\sigma_x$ correspondant.

Rapportons le tout à une fibre de référence $G'G'_1$ dont la position n'est pas précisée dès l'abord et qui sera choisie le plus opportunément pour conduire à l'expression la plus simple de $\sigma_x$.

Soit $\delta'_0$ la dilatation subie par cette fibre de référence.

Les $z'$ sont comptés positifs vers l'extrados, négatifs vers l'intrados.

Avant déformation, dans l'amplitude angulaire élémentaire $d\alpha'$, les fibres avaient un centre de courbure C; après déformation, elles ont un centre de courbure C'', l'angle $d\alpha'$ étant devenu $d\alpha''$. On part



de l'hypothèse que les sections transversales et planes avant déformation restent transversales et planes après déformation.

On sait que l'on obtiendra ainsi la valeur de $\sigma_x$.

On a, par définition de $\delta_x$ :

$$AA''_1 = AA_1\,(1+\delta_x)$$

mais :

$$AA''_1 = (z''+\rho'')\,d\alpha'' = \rho''d\alpha''\left(1+\frac{z''}{\rho''}\right) = \rho''d\alpha''\left(1+\frac{z'}{\rho''}\right)$$

$$AA_1 = (z'+\rho')\,d\alpha' = \rho'd\alpha'\left(1+\frac{z'}{\rho'}\right)$$

mais aussi :

$$G'G''_1 = (1+\delta'_0)\,G'G'_1$$

ou

$$\rho''d\alpha'' = (1+\delta'_0)\,\rho'd\alpha'$$

$\delta'_0$ étant la dilatation de la fibre de référence.

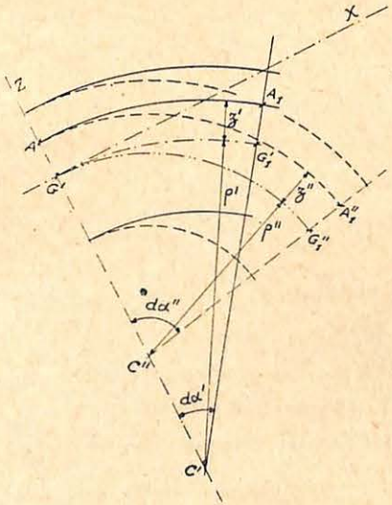



Fig. 1. — Etude géométrique de la déformation.

Donc :

$$1+\delta_x = \frac{AA''_1}{AA_1} = \frac{\rho''d\alpha''}{\rho' d\alpha'} \frac{1+z'/\rho''}{1+z'/\rho'}$$

$$1+\delta_x = (1+\delta'_0) \frac{1+z'/\rho''}{1+z'/\rho'}$$

On peut écrire :

$$\delta_x = (1+\delta'_0) \frac{1+z'/\rho''}{1+z'/\rho'} - (1+\delta'_0) + \delta'_0$$

$$= (1+\delta'_0) \frac{(1+z'/\rho'')-(1+z'/\rho')}{1+z'/\rho'} + \delta'_0$$

$$= \frac{(1+\delta'_0)(1/\rho''-1/\rho')z'}{1+z'/\rho'} + \delta'_0$$

ou encore :

$$\delta_x = \frac{1}{1+z'/\rho'} \left\{ \delta'_0 + \left[\frac{\delta'_0}{\rho'} + (1+\delta'_0)\left(\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'}\right)\right] z' \right\}$$

Donc, en vertu des hypothèses :

$$\sigma_x = \frac{E}{1+z'/\rho'} (\delta'_0 + k.z') \qquad (1)$$

avec :

$$k = \frac{\delta'_0}{\rho'} + (1+\delta'_0)\left(\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'}\right)$$

Cette formule n'est qu'une étape de l'étude, puisqu'elle contient deux variables auxiliaires $\delta'_0$ et $\rho''$, à éliminer.

Telle qu'elle, cette formule exprime la *loi de déformation admise.*

Il y a maintenant à poser les *équations d'équilibre* qui contiennent les $\sigma_x$ :



Equation d'équilibre suivant l'axe des $x$ :

$$N = \int_0^\Omega \sigma_x.d\Omega = E.\delta'_0 \int_0^\Omega \frac{d\Omega}{1+z'/\rho'} + E.k \int_0^\Omega \frac{z'.d\Omega}{1+z'/\rho'} \qquad (2)$$

Equation d'équilibre de rotation, par exemple par rapport à l'axe passant par G', et parallèle à l'axe neutre :

$$M' = \int_0^\Omega \sigma_x.z'.d\Omega = E.\delta'_0 \int_0^\Omega \frac{z'.d\Omega}{1+z'/\rho'} + E.k \int_0^\Omega \frac{z'^2.d\Omega}{1+z'/\rho'} \qquad (3)$$

On dispose ainsi des trois équations (1), (2), (3) entre lesquelles on va éliminer $\delta'_0$ et $\rho''$.

*Section transversale transformée :*

Au lieu de continuer à raisonner sur la section transversale réelle, on va raisonner sur cette section après l'avoir transformée opportunément (fig. 2).

On choisit une base de transformation AA.

On remplace la demi-largeur DB du profil par DB' obtenue en joignant BD, en prenant l'intersection E avec la base de transformation et en rejetant E en B'.

On obtient ainsi un nouveau contour de la section transversale.

On a :

$$\frac{b'}{b} = \frac{\rho_0}{z'+\rho'} \qquad b' = \frac{b.\rho_0}{z'+\rho'}$$

Une autre base de transformation que AA donnerait des $b'$ tous modifiés dans le même rapport, donc *toutes les surfaces transformées que l'on pourrait obtenir ainsi ont le même centre de gravité* G'.

C'est le lieu des points G' qui sera choisi comme fibre de référence $G'G'_1$.

Sa position est bien définie et son rayon de courbure aussi.

La surface transformée est telle que son aire :

$$\Omega' = \int_0^{\Omega'} d\Omega' = \int_0^{\Omega'} b'.dz = \rho_0 \int_0^{\Omega'} \frac{b.dz}{z'+\rho'}$$

Le centre de gravité G' répond à :

$$\rho'.\Omega' = \int_0^{\Omega'} b'.dz(z+\rho) = \rho_0 \int_0^{\Omega'} \frac{b(z+\rho)}{z+\rho} dz = \rho_0 \int_0^{\Omega'} b.dz$$

$$\boxed{\rho'.\Omega' = \rho_0.\Omega} \qquad (4)$$

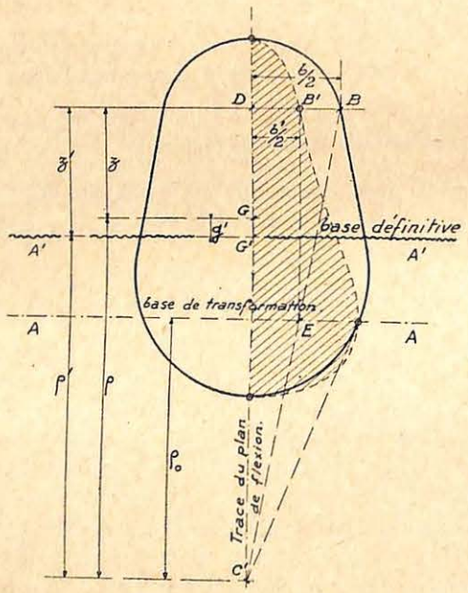



Fig. 2. — Etude des sections transversales transformées.



Donc, si l'on adopte à titre final dans ce problème, comme *base de transformation*, l'axe qui passe par le centre G' commun à toutes les surfaces transformées, on obtient :

$$\rho' = \rho_0 \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega' = \Omega} \qquad (5)$$

Dans ces conditions :

$$\Omega' = \int_0^{\Omega'} \frac{b.dz}{1+z'/\rho'} = \int_0^{\Omega'} \frac{d\Omega}{1+z'/\rho'}$$

D'ailleurs, il est évident que, puisque :

$$\frac{b'}{b} = \frac{\rho_0}{\rho'+z'} = \frac{1}{1+z'/\rho'}$$

donc :

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{1+z'/\rho'}$$

Donc, lorsque la base de transformation passe en G' :

$$\rho_0 = \rho'$$

$$\int_0^{\Omega'} \frac{z'.d\Omega}{1+z'/\rho'} = \int_0^{\Omega'} z'.d\Omega' = 0$$

$$\int_0^{\Omega'} \frac{z'^2.d\Omega}{1+z'/\rho'} = \int_0^{\Omega'} z'^2.d\Omega' = I'$$

moment d'inertie de la section transformée par rapport à l'axe A'A' passant par G'.

Si l'on introduit ces résultats dans les expressions (1) et (2), celles-ci deviennent :

$$N = E.\delta'_0.\Omega \qquad M' = E.k.I'$$

donc :

$$\delta'_0 = \frac{N}{E.\Omega} \qquad k = \frac{M'}{E.I'}$$

et la tension $\sigma_x$ répond à la formule très simple :

$$\boxed{\sigma_x = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \left[ \frac{N}{\Omega} + \frac{M'.z'}{I'} \right]} \qquad (6)$$

Cette formule est donc une généralisation de la formule des pièces droites fléchies.

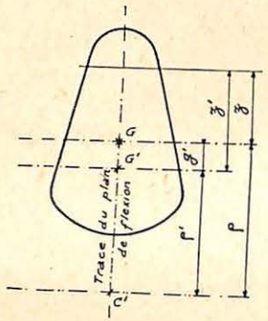



Fig. 3. — Calcul de I'.

*Expression simple de* I' (fig. 3).

On peut donner de I' une expression particulièrement simple :

On a $z' = z+g'$, en appelant $g'$ la distance GG' :

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{1 + z'/\rho'} = \frac{\rho'}{\rho'+z'}\, d\Omega$$

mais $\rho'+z' = \rho+z$ :

$$dI' = (z+g')^2 \frac{\rho'}{\rho+z}\, d\Omega$$

$$I' = \rho' \int_0^{\Omega'} \frac{(z+g')(z+\rho-\rho')d\Omega}{\rho+z}$$

$$= \rho' \int_0^{\Omega'} (z+g')\left(1 - \frac{\rho'}{\rho+z}\right) d\Omega$$



$$I' = \rho' \left\{ \int_0^{\Omega'} z.d\Omega - \rho' \int_0^{\Omega'} \frac{z.d\Omega}{\rho+z} + g' \int_0^{\Omega'} d\Omega - g'.\rho' \int_0^{\Omega'} \frac{d\Omega}{\rho+z} \right\}$$

$$I' = \left\{ -\rho' \int_0^{\Omega'} z.d\Omega' + g'.\Omega - g'.\Omega \right\} = -\rho' \int_0^{\Omega'} z.d\Omega'$$

mais $z = z'-g'$; donc :

$$I' = -\rho' \int_0^{\Omega'} z'.d\Omega' + g'.\rho'.\Omega' = g'.\rho'.$$

$$\boxed{I' = (\rho-\rho')\, \rho'.\Omega} \qquad (7)$$

Cette expression facilitera souvent l'application de la formule (6).

*Expression de la déformation angulaire* (fig. 4) :

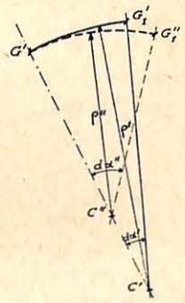



Fig. 4. — Etude de la déformation angulaire.

$$d\varphi = d\alpha'' - d\alpha' = \frac{G'G''_1}{\rho''} - \frac{G'G'_1}{\rho'} = ds' \left(\frac{1+\delta'_0}{\rho''} - \frac{1}{\rho'}\right)$$

or :

$$k = \frac{1+\delta'_0}{\rho''} - \frac{1}{\rho'} \qquad \text{et} \qquad k = \frac{M'}{E.I'}$$

donc :

$$\boxed{\frac{d\varphi}{ds'} = \frac{M'}{E.I'}} \qquad (8)$$

Cette relation est très importante pour les applications.

*Loi de variation de $\sigma_x$ dans une section déterminée* (fig. 5).

La loi répond à la formule :

$$\sigma_x = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \left[ \frac{N}{\Omega} + \frac{M'.z'}{I'} \right] \qquad (6)$$

En fonction de $z'$, cette loi est donc une hyperbole équilatère non rapportée à ses asymtotes :

$$\sigma_x = \infty \qquad \text{pour} \qquad 1 + \frac{z'}{\rho'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad z' = -\rho'$$

Donc une des asymptotes est la droite passant par le centre de courbure C (as. I); il en résulte qu'il y a grand danger à créer un rayon de courbure intrados trop petit.

Comme :

$$z' = \frac{\rho'(N/\Omega - \sigma_x)}{\sigma_x - M'.\rho'/I'}$$

$$z' = +\infty \qquad \text{pour} \qquad \sigma_x = \frac{M'.\rho'}{I'}$$

La seconde asymptote (as. II) est donc la droite parallèle à l'axe de repère CG' située à la distance $M'.\rho'/I'$ de cet axe, du côté positif ou négatif suivant que M' est positif ou négatif.



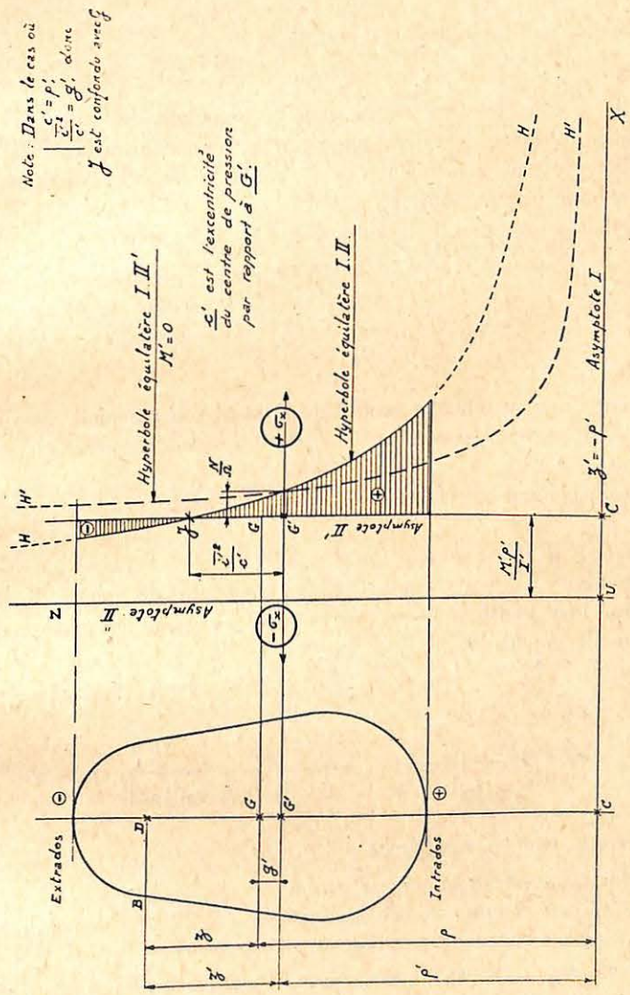



Fig. 5. — Variation de la tension $\sigma_x$ dans une section déterminée.

Cette asymptote est confondue avec CG' si le moment M' est nul.

D'autre part, pour $z' = 0$ : $\sigma_x = \dfrac{N}{\Omega}$

Elle a donc le signe de N; donc, à *l'aplomb du centre G' des sections transformées, la tension $\sigma_x$ est la tension moyenne* $N/\Omega$.

Ceci confirme assurément que la méthode de calcul adoptée est la méthode la plus naturelle.

Quant à l'axe neutre, il correspond à $\sigma_x = 0$, donc à :

$$z' = -\frac{N}{\Omega} \cdot \frac{I'}{M'} = -\frac{(i')^2}{c'}$$

$i'$ étant le rayon d'inertie central de la section transformée avec base de transformation passant par G'; $c'$ étant l'excentricité de la charge N par rapport à G'.

Le diagramme de $\sigma_x$ est donc l'hyperbole HH.

Si $c' = \rho'$, c'est-à-dire si la charge N passe à l'aplomb du centre de courbure C, la tension à l'aplomb du centre de gravité G de la section non transformée est nulle; donc l'axe neutre passe par le centre de gravité G.

En effet, $M' = N.\rho'$, donc pour $z' = -(\rho - \rho')$ :

$$(\sigma_x)_G = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \left[ \frac{N}{\Omega} - \frac{M'(\rho - \rho')}{(\rho - \rho')\rho'\Omega} \right] = 0$$

*Remarque relative aux signes* :

Pour les applications, on ne perdra pas de vue que :

les $z'$ sont comptés positifs ou négatifs suivant qu'ils sont du côté convexité ou concavité par rapport au centre G';

N est positif ou négatif suivant qu'il s'agit d'une traction ou d'une compression;

M' est positif ou négatif suivant que ce couple tend à fermer ou à ouvrir la pièce courbe, c'est-à-dire à augmenter ou à diminuer la courbure;



$\sigma_x$ est positif ou négatif suivant que la tension est une traction ou une compression.

Donc pour un crochet de levage, pour le point intrados de la section contrôlée :

$$z' < 0, \qquad N > 0, \qquad M' < 0$$

## 6. — PIECES A FORTE COURBURE NON FLECHIES OU SOLLICITEES PAR TRACTION OU COMPRESSION SIMPLE.

On dit que la pièce est dans ce cas lorsqu'elle ne subit pas de déformation angulaire.

Or :
$$\frac{d\varphi}{ds'} = \frac{M'}{E.I'}$$

Cela se présente donc lorsque $M' = 0$.

Ce cas se présente donc lorsque la force N passe par le centre de gravité G' des sections transformées.

Dans ce cas :

$$\boxed{\sigma_x = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \frac{N}{\Omega}} \qquad (7)$$

La loi de $\sigma_x$ est alors une hyperbole équilatère H'H' rapportée à ses asymptotes (fig. 5).

## 7. — EXPRESSIONS PARTICULIERES DE I' et $\rho'$.

*Cas de la section circulaire* (fig. 6).

On a :
$$\rho' = \frac{\Omega}{\displaystyle\int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\rho + z}}$$

car :

$$\Omega' = \Omega \qquad \text{et} \qquad d\Omega' = \frac{d\Omega}{\rho+z}$$

$$z = a \,.\, \sin\alpha, \qquad dz = a \,.\, \cos\alpha \,.\, d\alpha, \qquad b = 2a \,.\, \cos\alpha$$

$$\int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\rho+z} = \int_{-a}^{+a} \frac{b.dz}{\rho+z} = 2\,a^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^2\alpha.d\alpha}{\rho+a.\sin\alpha}$$

$$= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left( \frac{\rho}{a^2} - \frac{1}{a}\sin\alpha + \frac{1}{a^2}\,\frac{a^2-\rho^2}{\rho+a.\sin\alpha} \right) d\alpha$$

$$= 2\pi\rho + 0 + \frac{2(a^2-\rho^2)}{a} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{\rho/a+\sin\alpha}$$

$$= 2\pi\rho + \frac{2(a^2-\rho^2)}{a}\,\frac{\pi a}{\sqrt{\rho^2-a^2}} = 2\pi\,(\rho - \sqrt{\rho^2-a^2})$$

donc :

$$\rho' = \frac{a^2}{2(\rho-\sqrt{\rho^2-a^2})} = \frac{\rho^2-(\rho^2-a^2)}{2(\rho-\sqrt{\rho^2-a^2})}$$

$$\boxed{\rho' = \frac{1}{2}\,(\rho + \sqrt{\rho^2-a^2})} \qquad (8)$$

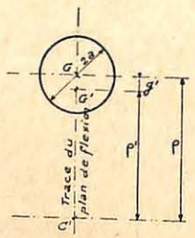



Fig. 6. — Section circulaire.



D'autre part :

$$\boxed{I' = (\rho-\rho')\,\rho'.\Omega = \frac{\pi.a^4}{4} = I} \qquad (9)$$

Le cas de la section circulaire est par conséquent particulièrement simple.

*Cas de la section elliptique* (fig. 7).

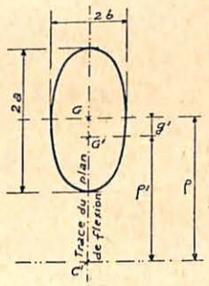



Fig. 7. — Section elliptique.

On considère la section elliptique obtenue par réduction des largeurs de la section circulaire.

On trouve ainsi aisément que :

$$\rho' = \frac{1}{2}\,(\rho + \sqrt{\rho^2-a^2}) \qquad (8')$$

tandis que :

$$I' = I = \frac{\pi.a^3.b}{4} \qquad (9')$$

*Cas de la section rectangulaire* (fig. 8) :

$$\rho' = \frac{\Omega}{\int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\rho+z}}$$

$$\int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\rho+z} = b \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dz}{\rho+z} = b \cdot \log_e \left(\frac{\rho+h/2}{\rho-h/2}\right)$$

$$\rho' = \frac{h}{\log_e \left(\frac{\rho+h/2}{\rho-h/2}\right)}$$

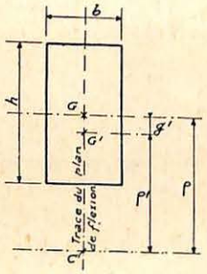



Fig. 8. — Section rectangulaire.

On peut utiliser la formule telle qu'elle, ou bien développer le dénominateur en série, en s'arrêtant aux premiers termes; on a alors :

$$\rho' = \rho \frac{1}{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{80}\left(\frac{h}{\rho}\right)^4} \qquad (8'')$$



et $I' = (\rho - \rho')\rho'.\Omega$ devient :

$$I' = \frac{b.h^3}{12}\left[1 - \frac{1}{60}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{420}\left(\frac{h}{\rho}\right)^4\right] \qquad (9'')$$

*Cas de la section trapèze* (fig. 9).

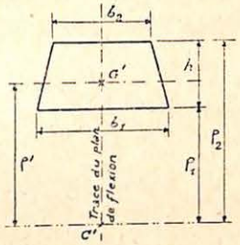



Fig. 9. — Section trapèze.

On trouve que :

$$\rho' = \frac{(b_1+b_2)\,h^2}{2\left[(b_1.\rho_2 - b_2.\rho_1)\log_e \frac{\rho_2}{\rho_1} + (b_1-b_2)\,h\right]} \qquad (10)$$

$$I' = \frac{\left\{\left[\left(b_1\frac{\rho_2}{h} - b_2\frac{\rho_1}{h}\right)\log_e\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2}(b_1-b_2)\right]\frac{\rho_g}{h} - \frac{1}{2}(b_1+b_2)\right\}(b_1+b_2)^2 h^3}{\left\{2\left(b_1\frac{\rho_2}{h} - b_2\frac{\rho_1}{h}\right)\log_e\frac{\rho_2}{\rho_1} + (b_2-b_1)\right\}^2} \qquad (11)$$

avec :

$$\rho_g = \rho_2 - h\,\frac{2b_1+b_2}{3\,(b_1+b_2)}$$

## B. — APPLICATION DE LA METHODE BASEE SUR LA RESISTANCE DES MATERIAUX, A L'ETUDE D'UN MAILLON DE CHAINE ELLIPTIQUE OU CIRCULAIRE, SOLLICITE PAR DEUX FORCES EGALES ET DIAMETRALEMENT OPPOSEES

### 8. — *a)* EQUATIONS DE DEPART DANS LE CAS GENERAL.

La sollicitation étant symétrique par rapport aux axes de symétrie de l'anneau, il suffit d'étudier le quart de celui-ci.

Comme le maillon est une pièce à forte courbure relative, tous les raisonnements se font sur la fibre moyenne passant par le centre de gravité G' des sections transformées et non pas sur la fibre moyenne passant par le centre de gravité G des sections primitives. Par suite, toutes les cotes sont à prendre comme cotes accentuées (fig. 10).

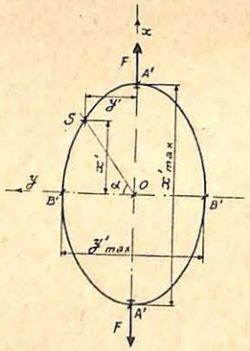



Fig. 10. — Forme générale du maillon.

Nous dégageons le quart A'B' de l'anneau (fig. 11 et 12).



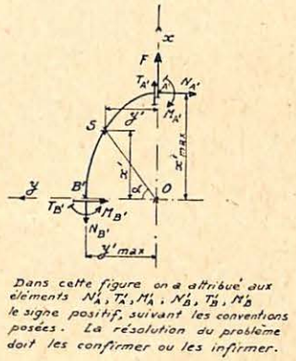



Fig. 11.

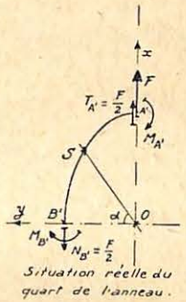



Fig. 12.

Il est évident que, par raison de symétrie :

$$T'_B = 0 \qquad \text{et} \qquad T'_A = \frac{F}{2} \tag{12}$$

Les équations d'équilibre de translation et de rotation du quart de l'anneau donnent donc :

a) Translation dans la direction OB' :

$$N'_A = 0 \tag{13}$$

b) Translation dans la direction OA' :

$$N'_B = \frac{F}{2} \qquad (14)$$

c) Rotation autour du point A' :

$$M'_A - M'_B - N'_B \,.\, y'_{max.} = 0 \qquad (15)$$

De ces deux équations, nous tirons la valeur de $M'_B$ :

$$M'_B = M'_A - N'_B \,.\, y'_{max.} = M'_A - \frac{F}{2}\, y'_{max.} \qquad (16)$$

Puisque, en la section B', il n'y a pas d'effort tranchant, mais seulement un effort longitudinal et un moment fléchissant, nous pouvons considérer cette section B' comme sollicitée uniquement, ainsi que le montre la figure 14, par un effort longitudinal :

$$N'_B = \frac{F}{2}$$

excentré d'une quantité $c'$ telle que :

$$c' = \frac{M'_B}{N'_B} \qquad (17)$$

Nous pouvons dès lors considérer, à cause de la double symétrie, qu'il n'y a qu'une seule inconnue hyperstatique dans le problème, le moment $M'_A$.

Pour calculer la variable hyperstatique $M'_A$, nous disposons de l'équation de déformation qui exprime que, par raison de symétrie, les deux sections, en A' et en B', ne tournent pas l'une par rapport à l'autre.



Il vient alors, d'après la formule de *Bresse* :

$$\int_{B'}^{A'} \frac{M'}{E.I'}\, ds' = 0 \qquad (18)$$

La figure 13 montre qu'au point courant S' :

$$M' = M'_A - \frac{F}{2} \,.\, y' \qquad (19)$$

Donc, la formule de *Bresse* donne :

$$\int_{B'}^{A'} \frac{M'_A - \frac{F}{2} \,.\, y'}{E.I'}\, ds' = 0 \qquad (20)$$

ou encore :

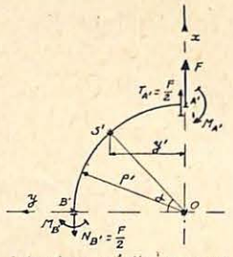
$$\boxed{M'_A = \frac{F}{2} \, \frac{\int_{B'}^{A'} \frac{y'.ds'}{I'}}{\int_{B'}^{A'} \frac{ds'}{I'}}} \qquad (21)$$

## 9. — *b)* CAS PARTICULIER DE L'ANNEAU CIRCULAIRE A SECTION TRANSVERSALE CIRCULAIRE CONSTANTE (ANNEAU ROND, SECTION RONDE).

1°) *Etude des moments fléchissants.*

Dans ce cas (fig. 13) :

$$ds' = \rho'.d\alpha \qquad y' = \rho' \,.\, \cos \alpha$$




Situation réelle du quart de l'anneau rond.

Fig. 13.

L'équation (21) devient :

$$M'_A = \frac{F}{2} \cdot \rho' \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \alpha . d\alpha}{\int_0^{\pi/2} d\alpha}$$

Effectuant les intégrations, nous obtenons :

$$\boxed{M'_A = \frac{F}{2} \cdot \rho' \cdot \frac{2}{\pi} = 0{,}318 \cdot F \cdot \rho'} \qquad (22)$$

donc :

$$\boxed{M'_B = M'_A - \frac{F}{2} \cdot \rho' = -\frac{F}{2} \cdot \rho' \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}182 \cdot F \cdot \rho'} \qquad (23)$$

Ces relations montrent que, dans le cas d'un anneau sollicité dans son ensemble par traction, $M'_A$ est essentiellement positif et $M'_B$ essentiellement négatif.

En valeur absolue, le plus grand des deux moments est le moment $M'_A$, aux endroits de l'application des forces extérieures F.



Dans le maillon rond de section ronde, le rayon $\rho'$ au centre de gravité G' de la section transformée est liée au rayon au centre de gravité de la section primitive par la formule :

$$\rho' = \rho \frac{1 + \sqrt{1 - (a/\rho)^2}}{2} \qquad (24)$$

voir équat. (8)

$a$ désignant le rayon de la section transversale du tore.

Comme nous l'avons dit précédemment, le couple $M'_B$ peut être considéré comme produit par l'excentrement $c'$ de la force :

$$N'_B = \frac{F}{2}$$

$$\boxed{c' = \frac{M'_B}{N'_B} = -\rho' \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}364 \cdot \rho'} \qquad (25)$$

Le signe moins indique que la ligne d'action en B' est vers l'intrados.

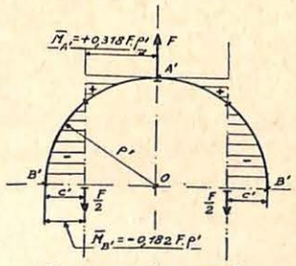



Diagramme des moments fléchissants.

Fig. 14.

Le demi-anneau peut donc être considéré sollicité comme le représente la figure 14, dans laquelle le diagramme hachuré n'est autre que le diagramme des moments fléchissants.

2°) *Diagramme des tensions normales circonférentielles aux diverses sections transversales de l'anneau.*

La formule de la résistance des matériaux des pièces à forte courbure relatives sollicitées par flexion plane composée est :

$$\sigma_x \text{ ou } \sigma_a = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \left[ \frac{N}{\Omega} + \frac{M'.z'}{I'} \right]$$

Ici :

$$M' = \frac{F}{2} \cdot \rho' \left( \frac{2}{\pi} - \cos \alpha \right)$$

$$N = \frac{F}{2} \cdot \cos \alpha$$

donc :

$$\boxed{\sigma_a = \frac{1}{2} \frac{F}{\Omega} \frac{1}{1+z'/\rho'} \frac{2}{\pi.n'} \left[ + \rho' + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \, (n'-\rho') \right]} \qquad (26)$$

en posant :

$$n' = \frac{I'}{\Omega.z'}$$

Pour une fibre déterminée de l'anneau, c'est-à-dire un $z'$ déterminé, le facteur devant le crochet est une constante. Il suffit donc d'étudier la variation de l'expression contenue dans le crochet.

a) *Pour les fibres intrados* (fig. 15).

Cette équation montre que le diagramme du $\sigma_a$ pour $z'$ = constante peut être obtenu d'une manière particulièrement simple.

Portons sur le diamètre de l'anneau et à partir du centre une longueur égale à :

$$OB'' = -\frac{\pi}{2} (n'-\rho')$$



puisque $z' < 0$, $n' < 0$, donc à fortiori $n'-\rho' < 0$. Pour trouver la tension $\sigma_a$ en la section S', projetons la longueur OB'' sur le rayon de S'. Nous obtenons la longueur :

$$OS'' = -\frac{\pi}{2} (n'-\rho') \cos \alpha$$

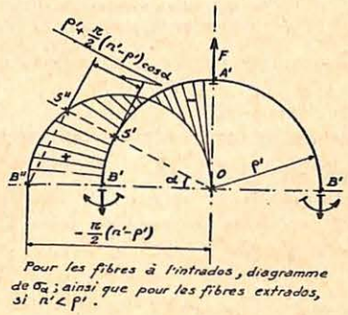



Fig. 15. — Diagramme polaire des tensions $\sigma_a$ intrados.

La longueur :

$$S'S'' = \rho' + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \, (n'-\rho')$$

Elle représente donc la tension cherchée.

La circonférence de rayon OB'', lue par rapport à la circonférence du centre G' des sections de l'anneau, constitue donc le diagramme polaire de la tension $\sigma_a$ à l'intrados.

b) *Pour les fibres côtés extrados* (fig. 16).

Ici, $z' > 0$, $n' > 0$. Il y aura donc trois cas à considérer :

$\alpha$) $n' < \rho'$, la construction précédente s'applique intégralement;

$\beta$) $n' > \rho'$, puisque dans ce cas $n'-\rho' > 0$, la circonférence de diamètre OB'' est à porter de l'autre côté de l'axe vertical de symétrie et la construction est celle indiquée par la figure 16. La tension $\sigma_a$ en la section S' sera représentée par la longueur S'S'';

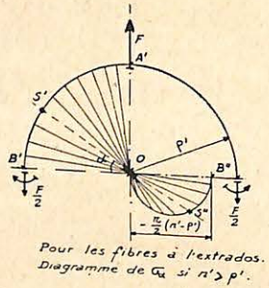



Fig. 16. — Diagramme polaire des tensions $\sigma_\alpha$ extrados.

γ) $n' = \rho'$, la tension est constante en toute section :

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{F}{\Omega}\,\frac{1}{1+z'/\rho'}\,\frac{r}{\pi.n'}\,\rho'$$

c) *Pour la fibre moyenne* (fig. 17).

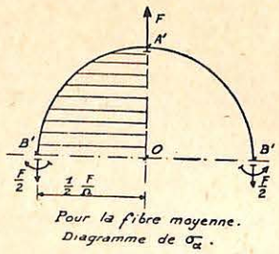



Fig. 17. — Diagramme des tensions $\sigma_\alpha$ pour la fibre moyenne.

$$z' = 0, \qquad n' = \infty$$

et la formule (26) n'est plus valable, car on a mis $1/n'$ en évidence, c'est-à-dire divisé par zéro. En remontant avant ce stade, il vient :

$$(\sigma_\alpha)_{\text{fibre moyenne}} = \frac{1}{2}\,\frac{F}{\Omega}\cos\alpha$$



Le diagramme de variation de la tension normale le long de la fibre moyenne, est donc donné simplement par la circonférence de

diamètre $\frac{1}{2}\,.\,\frac{F}{\Omega}$ lue par rapport à l'axe vertical.

5°) *Etude des déformations.*

Les seules déformations que l'on utilise ici sont en général les variations de longueur des diamètres A'A' et B'B' de l'anneau.

Nous nous bornons à calculer ces deux variations; nous appelons $f_A$ la variation du diamètre A'A' et $f_B$ la variation du diamètre B'B'. Pour calculer ces variations, que nous appelons les flèches diamétrales, nous appliquons le théorème de Castigliano ([8], chapitre VI).

*Calcul de $f_A$, variation du diamètre suivant lequel sont appliquées les charges F.*

D'après le théorème de Castigliano, ce déplacement est la dérivée du travail élastique de déformation, par rapport à la charge F :

$$f_A = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial F}$$

le point d'application de l'une des charges F étant considéré comme fixe, celui de l'autre charge F subissant alors le déplacement $f_A$.

Or, le travail élastique total de l'anneau a pour expression ([5], n° 162, page 271, et n° 163, page 273) :

$$\mathcal{T} = \frac{4}{2E.I'}\left\{\int_0^{\pi/2} M'^2.ds' + \frac{I'}{\Omega'}\left(\int_0^{\pi/2} N^2.ds' + \xi.\frac{E}{G}.\int_0^{\pi/2} T^2.ds'\right)\right\}$$

D'où :

$$f_A = \frac{4}{E.I'} \left\{ \int_0^{\pi/2} M'. \frac{\partial M'}{\partial F} . ds' + \right.$$

$$\left. + \frac{I'}{\Omega'} \left( \int_0^{\pi/2} N. \frac{\partial N}{\partial F} . ds' + \xi. \frac{E}{G} . \int_0^{\pi/2} T. \frac{\partial T}{\partial F} . ds' \right) \right\}$$

Mais :

$$ds' = \rho' . d\alpha$$

$$M' = \frac{1}{2} F. \rho' \left( \frac{2}{\pi} - \cos \alpha \right)$$

$$N = \frac{F}{2} \cos \alpha \qquad T = \frac{F}{2} \sin \alpha$$

donc :

$$\frac{\partial M'}{\partial F} = \frac{1}{2} \rho' \left( \frac{2}{\pi} - \cos \alpha \right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial F} = \frac{1}{2} \cos \alpha \qquad \frac{\partial T}{\partial F} = \frac{1}{2} \sin \alpha$$

De tout cela, il résulte que :

$$f_A = \frac{4}{E.I'} . \frac{F}{4} . \rho'^3 \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{2}{\pi} - \cos \alpha \right)^2 d\alpha \\ + \frac{I'}{\Omega'} . \frac{1}{\rho'^2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha . d\alpha \right. \\ \left. + \xi. \frac{E}{G} . \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha . d\alpha \right\} \end{array} \right\} \quad (27)$$



Nous en déduisons successivement :

$$f_A = \frac{F}{E.I'} . \rho'^3 \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \times \frac{\pi}{2} + \left( \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2} \right)_0^{\pi/2} \\ - \frac{4}{\pi} \left( - \sin \alpha \right)_0^{\pi/2} \\ + \frac{I'}{\Omega'} . \frac{1}{\rho'^2} \left\{ \left( \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2} \right)_0^{\pi/2} \right. \\ \left. + \xi. \frac{E}{G} \left( - \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2} \right)_0^{\pi/2} \right\} \end{array} \right\}$$

$$f_A = \frac{F}{E.I'} . \rho'^3 \left[ \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{I'}{\Omega'.\rho'^2} \left( 1 + \xi. \frac{E}{G} \right) \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\boxed{f_A = \underbrace{0{,}149. \frac{F}{E.I'} . \rho'^3}_{\text{terme dû aux } M'} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \left( 1 + \xi. \frac{E}{G} \right) \frac{F}{E.\Omega'} . \rho'}_{\text{termes dus aux } N \text{ et } T}} \quad (28)$$

Le premier terme de l'expression (28) correspond aux effets des moments fléchissants sur la déformation, il est de loin prépondérant par rapport au deuxième terme; aussi la plupart des auteurs se bornent-ils à donner ce premier terme. Voir notamment les auteurs suivants qui établissent cette expression par d'autres voies :

[1] Hans LORENZ : § 28, pages 289 et 290.

[2] Arthur MORLEY : § 135, pages 393 et 384.

[5] S. TIMOSHENKO and J. M. LESSELS : § 58, pages 233 et 234.

*Calcul de $f_B$, variation du diamètre transversal aux charges.*

Comme il n'y a pas de force extérieure appliquée aux points B' dont on cherche le déplacement relatif $f_B$, pour pouvoir utiliser le théorème de Castigliano, nous plaçons en ces endroits une force auxiliaire H, nous calculons la dérivée $\partial\mathcal{T}/\partial H$, le déplacement $f_B$ cherché sera la valeur de cette dérivée pour $H = 0$ ([7], n° 166, page 277).

Si l'on appelle $M'_H$, $N_H$, $T_H$ les moments, efforts normaux, efforts tranchants dus à cette force auxiliaire H, le travail élastique produit par les deux forces F et les deux forces H est :

$$\mathcal{T}_{\text{dû aux F et aux H}} = \frac{4}{2E.I'}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\pi/2}(M'+M'_H)^2.\,ds' \\ \displaystyle+\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2}(N+N_H)^2.\,ds' \\ \displaystyle+\xi.\frac{E}{G}.\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2}(T+T_H)^2.\,ds'\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial H} = \frac{4}{E.I'}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\pi/2}(M'+M'_H).\frac{\partial M'_H}{\partial H}.\,ds' \\ \displaystyle+\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2}(N+N_H).\frac{\partial N_H}{\partial H}.\,ds' \\ \displaystyle+\xi.\frac{E}{G}.\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2}(T+T_H).\frac{\partial T_H}{\partial H}.\,ds'\end{array}\right\}$$

Or, pour $H = 0$ :

$$M'_H = N_H = T_H = 0$$



Donc :

$$f_B = \frac{4}{E.I'}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\pi/2} M'.\frac{\partial M'_H}{\partial H}.\,ds' \\ \displaystyle+\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2} N.\frac{\partial N_H}{\partial H}.\,ds' \\ \displaystyle+\xi.\frac{E}{G}.\frac{I'}{\Omega'}.\int_0^{\pi/2} T.\frac{\partial T_H}{\partial H}.\,ds'\end{array}\right\} \qquad (29)$$

Mais :

$$M' = \frac{1}{2}F.\rho'\left(\frac{2}{\pi} - \cos\alpha\right) \qquad M'_H = \frac{1}{2}H.\rho'\left(\frac{2}{\pi} - \sin\alpha\right)$$

$$N = \frac{F}{2}\cos\alpha \qquad M_H = \frac{H}{2}\sin\alpha$$

$$T = \frac{F}{2}\sin\alpha \qquad T_H = -\frac{H}{2}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial M'_H}{\partial H} = \frac{1}{2}\rho'\left(\frac{2}{\pi} - \sin\alpha\right)$$

$$\frac{\partial N_H}{\partial H} = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial H} = -\frac{1}{2}\cos\alpha$$

En introduisant ces valeurs dans (29) :

$$f_B = \frac{4}{E.I'} \cdot \frac{F}{4} \rho'^3 \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi} - \cos\alpha\right)\left(\frac{2}{\pi} - \sin\alpha\right) d\alpha \\ + \frac{I'}{\Omega'} \cdot \frac{1}{\rho'^2} \left(1 - \xi . \frac{E}{G}\right) \times \\ \qquad \times \int_0^{\pi/2} \sin\alpha . \cos\alpha . d\alpha \end{array} \right\}$$

$$f_B = \frac{F}{E.I'} \cdot \rho'^3 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 . \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} . (\cos\alpha)_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} (\sin\alpha)_0^{\pi/2} \\ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I'}{\Omega'} \cdot \frac{1}{\rho'^2} \left(1 - \xi . \frac{E}{G}\right) \end{array} \right\}$$

$$f_B = \frac{F}{E.I'} \cdot \rho'^3 \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{1}{2} \frac{I'}{\Omega'.\rho'^2} \left(1 - \xi . \frac{E}{G}\right) \right]$$

$$\boxed{f_B = \underbrace{-0{,}136.6 . \frac{F}{E.I'} \cdot \rho'^3}_{\text{terme dû aux M}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 - \xi . \frac{E}{G}\right) \frac{F}{E.\Omega'} . \rho'}_{\text{termes dus aux N et T}}} \qquad (30)\ (1)$$

(1) Même remarque que pour l'équation (28).



## C. — ETUDE DE L'ANNEAU CIRCULAIRE DE SECTION TRANSVERSALE RECTANGULAIRE PAR LA THEORIE DE L'ELASTICITE

### 10. — INTRODUCTION.

Nous ne développons pas tous les calculs de la méthode et nous indiquons seulement l'allure générale.

Nous insistons surtout sur le résultat pratique à tirer de cette étude de l'anneau par la théorie de l'élasticité. Le résultat le plus important, au point de vue technique, consiste dans les formules exactes des tensions normales circonférentielles agissant à l'intrados et à l'extrados de l'anneau, sauf aux points mêmes d'application des charges. Ces études sont conduites en considérant que l'anneau est dans un état plan de tension.

Les raisonnements sont établis en considérant un anneau ayant l'unité de longueur comme épaisseur dans la direction normale au plan moyen de l'anneau.

La théorie de l'élasticité ne fait aucune des hypothèses qui se trouvent à la base de la théorie ordinaire exposée précédemment. Elle prend la pièce telle qu'elle est. C'est-à-dire :

*a)* elle ne suppose pas que la pièce peut être considérée comme pièce longue;

*b)* elle ne néglige pas les déformations radiales;

*c)* elle ne fait aucune hypothèse au sujet de ce que deviennent les sections transversales et planes.

*Ouvrages à consulter.*

Pour cette étude par la théorie de l'élasticité, voir parmi les ouvrages cités à la bibliographie :

[1] Hans LORENZ :
chap. VIII : Der ebene Spannungszustand;
§ 55 : Ungleichförmige Belastung.
[4] Louis N. G. FILON : toute la brochure.
[8] Louis BAES : § 137 : Expression générale de la fonction d'Airy en coordonnées polaires.

[9] F. G. COKER and L.N. G. FILON :
§ 4.31 : Equilibrium of a continous circular ring under given edge stresses;
§ 4.32 : Force and couple resultant at a cross section of a circular ring;
§ 4.33 : Experimental verification of stresses in a circular ring : comparaison with a solution for two half-rings.
[13] S. TIMOSHENKO :
§ 35 : Solution générale des problèmes à deux dimensions en coordonnées polaires;
§ 36 : Application de la solution générale en coordonnées polaires.
[15] Maurice BRICAS : chap. XVIII : Anneaux concentriques, disques infinis percés d'un trou circulaire.

## 11. — GENERALITES.

Le problème est logiquement traité en coordonnées polaires. Le point de départ de MM. Filon et Coker est l'expression générale trigonométrique de la fonction d'Airy relative à l'anneau circulaire, valable quel que soit l'état de sollicitation. Cette méthode est une méthode directe. M. Bricas n'utilise pas la fonction d'Airy, mais procède par une méthode inverse qui consiste à se donner des solutions et à constater les sollicitations qui y correspondent.

Ayant la fonction d'Airy $\mathfrak{A}$ les tensions s'en déduisent directement par les relations :

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial \alpha^2}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2} \qquad \text{(fig. 18)}$$

$$\tau_{r\alpha} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \alpha}\right)$$



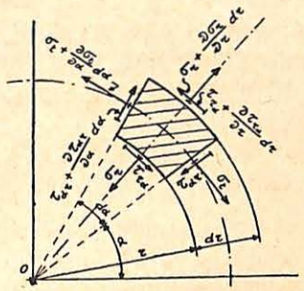


Fig. 18. — Equilibre d'un élément en coordonnées polaires.

La sollicitation extérieure, le long du contour, est définie par une fonction développée en série de Fourier.

L'expression générale de la fonction d'Airy contient des constantes qui seront déterminées par les conditions au contour relatives à l'état particulier de sollicitation considéré. Ces conditions sont tout à fait simples dans le cas étudié, puisqu'il n'y a que deux forces radiales F. Cette détermination se fait en identifiant les termes de même ordre, pris, d'une part, dans les expressions des tensions au contour déduites de la fonction d'Airy et, d'autre part, dans les expressions de la sollicitation extérieure le long de ce contour, développée en série de Fourier.

A ces relations d'identité viennent évidemment se joindre les trois équations d'équilibre statique de l'anneau.

*Remarque.* — Quand on effectue le calcul des coefficients, on constate que seuls ceux du premier ordre dépendent du rapport des constantes élastiques.

Ce fait conduit au résultat important suivant : la solution est indépendante des constantes élastiques pour autant que la résultante des forces extérieures agissant sur un des contours soit nulle, car alors les termes du premier ordre tombent. (La résultante est également nulle sur l'autre contour en vertu de l'équilibre statique de l'anneau.) Or, le problème de l'anneau que nous étudions est précisément dans ce cas.

Ce fait est très utile pour les études de photo-élasticité, car les résultats obtenus dans ces conditions au banc photo-élastique sur les matières transparentes restent applicables à toutes les autres matières isotropes, dans les limites de l'élasticité.

## 12. — CAS DE L'ANNEAU CIRCULAIRE, SOLLICITE PAR DEUX FORCES DIAMETRALEMENT OPPOSEES LE SOUMETTANT DANS SON ENSEMBLE A TRACTION.

1°) *Calcul des tensions, formules générales.*

L'étude de M. Filon [4] n'explicite les coefficients des formules donnant les tensions que dans le cas faisant l'objet de la présente note, où l'anneau est sollicité par deux charges diamétralement opposées appliquées à l'intrados.

Voici les expressions des tensions en tout point de l'anneau (fig. 18) :

$$\sigma_r = \frac{A_o}{r^2} + 2C_o + \sum_2^{\infty} [-n(n-1)r^{n-2}A_n - (n+1)(n-2)r^nB_n$$

$$-n(n+1)r^{-n-2}C_n - (n-1)(n+2)r^{-n}D_n]. \cos n\alpha$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{A_o}{r^2} + 2C_o + \sum_2^{\infty} [n(n-1)r^{n-2}A_n + (n+1)(n+2)r^nB_n$$

$$+n(n+1)r^{-n-2}C_n + (n-1)(n-2)r^{-n}D_n]. \cos n\alpha$$

$$\tau_{r\alpha} = \sum_2^{\infty} [n(n-1)r^{-n-2}A_n + n(n+1)r^nB_n - n(n+1)r^{-n-2}C_n$$

$$-n(n-1)r^{-n}D_n]. \sin n\alpha \qquad (31)$$

si

$$A_o = -\frac{r_e^2.r_i}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} F \qquad C_o = \frac{r_i}{2\pi(r_e^2 - r_i^2)} F$$

et pour $n \geqq 2$, et ayant des valeurs paires seulement.



Avec :

$$A_n = f_n.r_e^{-n+2}.\lambda^n. \frac{n(1-\lambda^2)+\lambda^2(1-\lambda^{2n})}{2(n-1)\,Q_n}$$

$$B_n = -f_n.r_e^{-n}.\lambda^n. \frac{n(1-\lambda^2)+(1-\lambda^{2n})}{2(n+1)\,Q_n}$$

$$C_n = f_n.r_e^{n+2}.\lambda^n. \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n}+\lambda^2(1-\lambda^{2n})}{2(n+1)\,Q_n}$$

$$D_n = -f_n.r_e^{n}.\lambda^n. \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n}+(1-\lambda^{2n})}{2(n-1)\,Q_n}$$

$$Q_n = (1-\lambda^{2n})^2 - n^2.\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2$$

$$f_n = (-1)^{(n/2)-1} \frac{2F}{\pi r_i}$$

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} \qquad (32)$$

Le problème est ainsi complètement résolu non seulement le long des contours extérieurs, mais aussi en plein anneau.

Toutefois, les calculs nécessaires pour traiter numériquement un cas déterminé sont fort longs, car certains coefficients dépendent de séries très lentement convergentes.

## 13. — RELATIONS DIRECTEMENT UTILES AU POINT DE VUE TECHNIQUE.

L'étude de l'anneau par la résistance des matériaux a fait apparaître que les deux sections AA, BB sont les seules dont l'étude importe au point de vue sécurité. Ce fait reste valable pour la méthode basée sur la théorie de l'élasticité.

Dans chacune de ces sections, il importe avant tout de connaître la valeur des tensions normales (tensions appelées ici tensions normales circonférentielles) aux bords intrados et extrados.

Les formules sont, pour ces endroits-là, très sensiblement simplifiées; elles prennent la forme suivante :

*Tensions normales circonférentielles aux limites extrados et intrados de la section AA'' :*

$$(\sigma^A)_{\text{extrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n.(1-\lambda^2).(1-\lambda^{2n}).\lambda^n}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2.\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2}\right\} \tag{33}$$

$$(\sigma^A)_{\text{intrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} - \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2.(1-\lambda^{2n})^2}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2.\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2} - 1\right)\right\}. \tag{34}$$

*Tensions normales circonférentielles aux limites extrados et intrados de la section BB'' :*

$$(\sigma^B)_{\text{extrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} - \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(n/2)-1}\frac{n.(1-\lambda^2).(1-\lambda^{2n}).\lambda^n}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2.\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2}\right\} \tag{35}$$



$$(\sigma^B)_{\text{intrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(n/2)-1}\left(\frac{2.(1-\lambda^{2n})^2}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2.\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2} - 1\right)\right\} \tag{36}$$

Dans ces formules, $\lambda = r_i/r_e$, et $n$ prend toutes les valeurs paires seulement.

Ces expressions comportent encore des séries, mais ces séries sont assez rapidement convergentes pour les cas de gros anneaux ($\lambda = r_i/r_e \leqq 0{,}60$, ou $\rho/h \leqq 2$). Or, ce sont justement ces cas-là où elles sont utiles, car pour les anneaux minces, la théorie de la résistance des matériaux suffit amplement pour les problèmes courants; quoique si l'on veut connaître les choses avec exactitude pour un anneau mince, il faille employer ces formules-ci.

On peut, pour les gros anneaux, se limiter aux termes pour lesquels $n = 2, 4, 6, 8$, et parfois 10; le calcul est alors assez rapide (1). Les termes des séries contenues dans les formules (35) et (36) sont alternativement positifs et négatifs.

## 14. — CALCUL DU MOMENT FLECHISSANT $M_A$.

Il est curieux et utile de constater que l'expression du moment fléchissant sollicitant l'anneau dans les sections AA est particulièrement simple. La comparaison de cette expression et de celle donnée par la résistance des matériaux (formule 22) est évidemment un élément intéressant de la confrontation des deux méthodes.

La connaissance du moment $M_A$, d'ailleurs égal à $M'_A$ puisque $N_A = 0$, fixe du même coup la connaissance des M, N, T dans tout l'anneau. Puisque la résultante $N_A = 0$ pour la section AA, le moment résultant *autour du centre de l'anneau* de toutes les tensions normales sollicitant cette section est égal au moment fléchissant.

(1) En procédant ainsi, nous avons retrouvé très sensiblement les valeurs indiquées par MM. Coker et Filon à la page 385 de leur ouvrage [9], pour le cas où :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}50.$$

On obtient donc en partant de la première formule (31) :

$$\boxed{M_A = \frac{F.r_i}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\log_e \lambda}{1-\lambda^2}\right)} \qquad (37)$$

avec :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e}$$

Cette expression est aussi, *pour toute section tranversale de l'anneau*, le moment résultant par rapport au centre de l'anneau, de toutes les tensions normales agissant à travers la section, mais n'est plus le moment fléchissant relatif à cette section.

Mais celui-ci a pour expression :

$$(M_G)_\alpha = M_A - \frac{F}{2}.\,\rho.\cos\alpha \qquad (37bis)$$

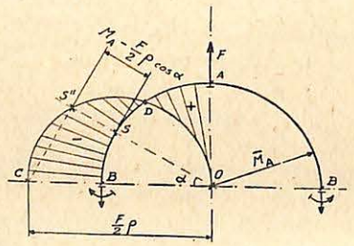



Fig. 19. — Diagramme polaire du moment fléchissant.

de sorte que le diagramme polaire du moment fléchissant est la circonférence OC de diamètre $F/2.\,\rho$ lue par rapport à la circonférence moyenne AB de l'anneau (fig. 19), dont le rayon serait supposé représenter $M_A$.

En développant le logarithme en série de $1-\lambda$ jusque $(1-\lambda^2)^2$ inclusivement et en désignant par $r_h$ la moyenne harmonique des rayons intrados et extrados, on a une expression suffisamment approchée :

$$M_A = \frac{F}{\pi}.\,r_h$$



La théorie ordinaire par la résistance des matériaux donne :

$$M_A = M'_A = \frac{F}{\pi}.\,\rho' \qquad (22)$$

ou

$$M_A = \frac{F}{\pi}.\,\rho.\,\frac{1}{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{80}\left(\frac{h}{\rho}\right)^4}$$

pour une section rectangulaire (formule 8'').

Ceci fait apparaître que les valeurs des moments fléchissants sollicitant les sections radiales de l'anneau diffèrent en général peu l'une de l'autre suivant que le calcul est mené par la résistance des matériaux ou par la théorie de l'élasticité. En effet, le tableau suivant donne le rapport entre le moment $M_A$ calculé par la théorie de l'élasticité et celui obtenu par la résistance des matériaux :

| pour $\lambda = \frac{r_i}{r_e}$ | $\frac{M_A \text{ (élasticité)}}{M_A \text{ (résistance des matériaux)}}$ | |
|---|---|---|
| 0,1 | 0,5138 | |
| 0,2 | 0,7255 | |
| 0,3 | 0,8414 | |
| 0,4 | 0,9090 | |
| 0,5 | 0,9495 | |
| . . . . . | . . . . . | |
| 0,6 | 0,9736 | |
| 0,7 | 0,9877 | |
| 0,8 | 0,9954 | (ces cas englobent tous |
| 0,9 | 0,9990 | les anneaux ordinaires) |
| 1,0 (anneau infiniment mince) | 1,0000 | |

Les rapports entre les tensions aux bords de l'anneau, calculées par la théorie de l'élasticité, et les tensions correspondantes calculées par la résistance des matériaux, sont du même ordre. On voit donc que

dans les cas habituels, allant même jusqu'à $\lambda = r_i/r_e = 0{,}60$, les deux méthodes de calcul donnent des résultats peu différents.

Mais on voit que dès que $\lambda = r_i/r_e < 0{,}30$, les deux méthodes de calcul donnent des résultats différant sensiblement; la résistance des matériaux ordinaire donne pour la section AA des moments fléchissants trop grands, et inversement pour la section BB des moments fléchissants trop petits.

Dans les cas de faible valeur de $\lambda = r_i/r_e$, la méthode par la théorie de l'élasticité s'impose.

*Remarque très importante.*

Il est essentiel de remarquer que la tension circonférentielle maximum de traction se produit à des endroits différents suivant que l'anneau est relativement mince ou qu'il est relativement épais.

Pour un anneau mince tel que $\lambda = r_i/r_e \geqq 0{,}60$, elle a lieu à l'extrados de la section AA située à l'aplomb de la charge.

Pour un anneau épais tel que $\lambda = r_i/r_e \leqq 0{,}60$, elle a lieu à l'intrados de la section BB, transversale aux charges.

C'est là un fait qu'il ne faut jamais perdre de vue.

15. — La relation (37*bis*) permet de calculer quelle est la position théorique du point d'inflexion de l'anneau pour les diverses valeurs du rapport $\lambda$.

Quand $\lambda = 1$ (anneau infiniment mince), le point d'inflexion, donc de moment nul, se trouve à un angle polaire $\alpha$ tel que $\cos \alpha = 0{,}636$ ($\alpha = 50°31'$).

Ceci est exactement la position obtenue par la théorie de la résistance des matériaux pour ce point.

Quand $\lambda = 0$, ce point d'inflexion se trouve à l'angle polaire $\alpha = \pi/2$, c'est-à-dire à l'aplomb de la charge; autrement dit, il n'existe plus.

Au fur et à mesure que l'épaisseur de l'anneau croît, ce point d'inflexion se rapproche de la charge.



## 16. — EXEMPLE D'APPLICATION DES FORMULES DONNEES PAR LA THEORIE DE L'ELASTICITE.

Appliquons les formules (33), (34), (35), (36), relatives aux tensions normales circonférentielles, au cas particulier où :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = \frac{1}{2}$$

et en nous limitant aux valeurs $n = 2, 4, 6, 8$. L'anneau a comme épaisseur l'unité de longueur.

*1) Section AA, correspondant au diamètre d'action de la charge :*

Extrados :

$$(\sigma_{a\,e}) = \frac{F}{r_i}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}(1{,}111+0{,}219+0{,}072+0{,}023)\right]$$

$$= \frac{F}{r_i}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\cdot 1{,}425\right)$$

$$= \frac{F}{r_i}(0{,}212+1{,}815)$$

$$(\sigma_{a\,e}) = +\,2{,}027\,\frac{F}{r_i}$$

2) *Section BB, correspondant au diamètre perpendiculaire aux charges :*

a) Intrados :

$$(\sigma_a)_i = \frac{F}{r_i}\left[\frac{5}{\pi}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}(4{,}556 - 1{,}328 + 1{,}040 - 1{,}004)\right]$$

$$= \frac{F}{r_i}\left(\frac{5}{\pi}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\cdot 3{,}264\right)$$

$$= \frac{F}{r_i}(0{,}530 + 2{,}078)$$

$$(\sigma_a)_i = +\,2{,}608\,\frac{F}{r_i}$$

b) Extrados :

$$(\sigma_a)_e = \frac{F}{r_i}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi}(1{,}111 - 0{,}219 + 0{,}072 - 0{,}023)\right]$$

$$= \frac{F}{r_i}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi}\cdot 0{,}941\right)$$

$$= \frac{F}{r_i}(0{,}212 - 1{,}198)$$

$$(\sigma_a)_e = -0{,}986\,\frac{F}{r_i}$$



## D. — ETUDE DE LA TENSION MAXIMUM DANS LA ZONE MEME DE CONTACT DE LA CHARGE

17. — Les formules de la résistance des matériaux établies précédemment (§ 8) n'ont pas considéré les effets produits dans la zone du contact tout à fait localisé de la charge et de l'anneau. D'autre part, les formules de la théorie de l'élasticité discutées précédemment (§§ 12 et 13) supposent que le contact est absolument ponctuel, ce qui conduit au contour à une tension radiale infinie au point de contact.

La réalité est évidemment différente de ces deux manières de procéder.

Les conclusions de ces deux mises en équation ne sont donc pas valables dans la région immédiate du contact, mais sont valables partout ailleurs. La tension $(\sigma_a)^{AA}_{\text{intrados}}$ obtenue au § 15 se produit donc près du point de contact et non au point même. Dans la région immédiate du contact, il faut évidemment s'inspirer de la théorie de la dureté de Hertz ([8], chap. XVII, pp. 697 à 716; et [13], chap. XI, pp. 365 à 376).

Il s'établit entre les deux anneaux en contact une surface de dimensions finies. La théorie de Hertz permet de calculer les dimensions de cette zone de contact, en supposant que tout reste dans les limites de l'élasticité.

Pour que la théorie de Hertz soit applicable, il faut que ces dimensions soient relativement petites par rapport au diamètre de la section transversale de l'anneau; en effet, sans cela, il n'est pas question de pouvoir compter sur une étreinte latérale suffisante de la matière située sous la charge. La théorie de Hertz permet aussi de calculer les tensions qui se produisent dans la zone de contact, dans les limites de l'élasticité; ces tensions sont beaucoup plus grandes que les plus grandes des tensions calculées précédemment.

18. — Nous considérons le cas de deux anneaux identiques se touchant mutuellement par l'intérieur et dont les plans sont normaux l'un à l'autre (cas des maillons d'une chaîne ordinaire).

L'application de la théorie de Hertz montre qu'il y a un cercle de contact entre les deux anneaux.

Lorsque les deux axes de l'ellipse de contact du cas général tendent vers l'égalité, les formules donnant la valeur de ces axes et celle des tensions, tendent vers les formules établies pour le contact de deux sphères (c'est le cas ici).

Donc, le rayon $b$ du cercle de contact qui s'établit entre les deux anneaux identiques, dans les limites de l'élasticité, est donné par la formule :

$$b = \sqrt[3]{\frac{3\,F}{8} \cdot \frac{4/G\,(1 - 1/m)}{2\,(1/a - 1/r_i)}} \qquad (38)\ (1)$$

Pour le cas d'anneaux en acier ou en fer, en prenant $m = 10/3$ :

$$b = 0{,}040.335 \cdot \sqrt[3]{\frac{F}{(1/a - 1/r_i)}} \qquad (38bis)$$

Aire du cercle de contact :

$$\pi\, b^2 = 0{,}005.11 \cdot \sqrt[3]{\frac{F^2}{(1/a - 1/r_i)^2}}$$

On en déduit la tension normale maximum, laquelle vaut 1,5 fois la tension normale moyenne qui serait obtenue en supposant que la force sollicitante se répartisse uniformément sur ce cercle de contact :

$$\sigma_{max} = 293{,}54 \sqrt[3]{F} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_i}\right)^2} \qquad (39)$$

(1) Rappelons que les lettres ont la signification suivante .
F : force extérieure sollicitant l'anneau;
G : module d'élasticité de glissement ou transversal;
$1/m$ : coefficient de Poisson;
$a$ : rayon de la section transversale de l'anneau;
$r_i$ : rayon de la fibre intrados de l'anneau.



Remarquons, avec Timoshenko, que si pour $m$, on adopte la valeur 4 au lieu de 10/3, les demi-axes croissent d'environ 1 % et la pression maximum diminue d'environ 2 %.

La tension maximum de cisaillement ne se produit pas au centre de la surface de contact, mais un peu en dessous, à une profondeur donnée par (pour $m = 10/3$) :

$$x_1 = 0{,}47 \cdot b$$

et elle a pour valeur :

$$\tau_{max} = 0{,}31\ (\sigma_x)_{max} \qquad (40)$$

ou en explicitant :

$$\tau_{max} = 90{,}997 \sqrt[3]{F} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_i}\right)^2} \qquad (40bis)$$

C'est la tension la plus dangereuse pour une matière douce obéissant au critère de Guest ou de la plus grande tension tangentielle. On déduit de là, la valeur que l'on peut admettre pour la force appliquée, sans dépasser les conditions ordinaires imposées.

19. — Pour une matière douce, telle qu'un acier laminé ou forgé, on peut admettre que la tension normale (au centre de la surface de contact) ne peut dépasser 1,20 . $R'_e$. $R'_e$ étant la limite d'élasticité du métal considéré ([14], p. 41). Une valeur aussi grande peut être tolérée, avec une sécurité contre le dépassement de la limite d'élasticité, car la matière est étreinte de toutes parts dans cette zone de contact où elle est en état triple de tension.

En s'imposant de ne pas franchir cette limite, la force maximum qu'il est possible d'appliquer à l'anneau est donnée par :

$$F = 68{,}32 \cdot 10^{-9} \frac{(R'_e)^3}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_i}\right)^2}$$

Quand on se trouve devant une matière raide, le problème est différent, le critère à appliquer n'étant plus le même.

En appliquant cette formule, on constate qu'il n'y a pratiquement pas moyen de faire en sorte, pour des anneaux, que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée dans la zone du contact de deux maillons.

L'expérience journalière montre que la rupture d'un maillon en fer ou en acier non écroui, sollicité diamétralement, ne se produit pas dans la région même du contact. Dans cette région, la matière ductile dont est fait l'anneau a nettement dépassé la limite d'élasticité, mais elle est étreinte de toutes parts par de la matière encore en état triple de tension qui n'a pas dépassé cette limite. L'expérience montre aussi que, même lorsque le métal de l'anneau est complètement écroui par suite d'actions répétées excessives, la rupture ne se produit pas non plus dans la zone de contact.

En fait, l'analyse de ce qui se passe dans la zone du contact est donc ici sans portée réelle pour autant que cette zone, par suite de la rotation de l'anneau, ne soit pas sollicitée ultérieurement par traction.

---



# II. - CONTROLE PHOTO-ELASTIQUE DE CERTAINS RESULTATS OBTENUS PAR LE CALCUL

## A. — INTRODUCTION

20. — Le principe de ce contrôle est basé sur le fait fondamental suivant : au moyen de modèles réduits transparents, exécutés en une matière jouissant de la propriété de la biréfringence accidentelle, il est aisé de déterminer expérimentalement six choses importantes :

1) la position des points d'inflexion des anneaux;

2) l'orientation du vecteur sollicitant la section transversale en ces points;

3) la position des points neutres ou non sollicités, à l'intrados et à l'extrados de l'anneau;

4) les trajectoires des tensions principales ou lignes isostatiques, ou au moins l'allure de ces trajectoires;

5) le diagramme des tensions circonférentielles à l'intrados et à l'extrados de l'anneau;

6) le diagramme des tensions normales sur les sections transversales, et principalement celui relatif à la section transversale située sur le diamètre normal à la direction des charges.

## B. — RAPPEL DES CARACTERES DE LA REGION DES POINTS D'INFLEXION

21. — Dans le cas d'une pièce droite prismatique, de section rectangulaire, sollicitée par flexion plane, la région aux abords d'un point d'inflexion présente un aspect extrêmement caractéristique dans l'examen optique par la photo-élasticité, comme nous l'avons montré nous-mêmes dans une étude publiée en collaboration avec M. Fritz Temmerman ([16]).

On constate, lors de l'étude de la théorie de la méthode de la photo-élasticité, que les courbes qui apparaissent en noir, si on fait usage d'une lumière monochromatique polarisée circulairement, sont des courbes suivant lesquelles la différence des tensions principales présente une même valeur. Si l'on fait usage de la lumière non monochromatique, chaque bande analogue présente une même couleur. De là le nom de bandes d'extinction ou de lignes isochromatiques donné à ces courbes.

Il est extrêmement important de discuter analytiquement les caractères des courbes isochromatiques dans la région du point d'inflexion, afin de pouvoir comprendre les photographies ci-annexées et de pouvoir en interpréter les résultats.

Une partie du texte du mémoire précité est reproduite ici.

### 22. — EXPRESSION GENERALE DES TENSIONS.

Nous travaillons en coordonnées rectangulaires, l'axe des $x$ étant l'axe de la pièce, l'axe des $z$ étant dans la direction orthogonale dans le plan de flexion; l'origine O des axes coïncide avec le point d'inflexion, figure 20.

$\sigma_x$ et $\sigma_z$ sont les tensions normales, $\tau_{xz}$ et $\tau_{zx}$ les tensions tangentielles, en un point quelconque de la région du point d'inflexion, relatives aux facettes respectivement normales à l'axe des $x$ et à l'axe des $z$.



La théorie classique de la flexion composée, avec effort tranchant, donne les lois simples de distribution des tensions en tous les points d'une section transversale :

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{\Omega} + \frac{M.z}{I} \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xz} &= \frac{T}{2I}\,(a^2 - z^2) \end{aligned}\right. \qquad (41)$$

N est l'effort longitudinal; T est l'effort tranchant.

N et T sont les composantes du vecteur sollicitation Q.

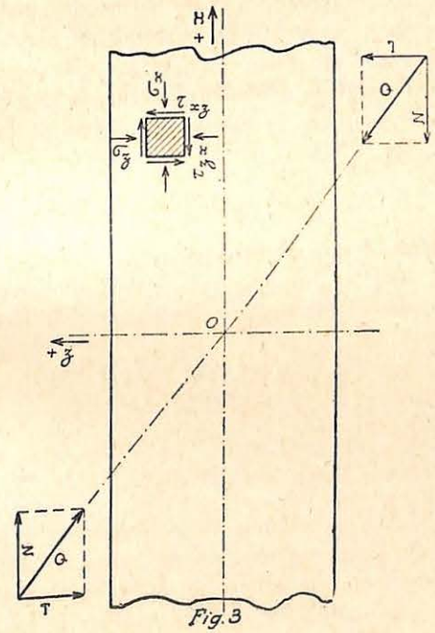



Fig. 20. — Sollicitation d'un tronçon de pièce droite.

M est le moment fléchissant :

$$M = T.x \qquad (42)$$

Si e est l'épaisseur de la pièce et $a$ la demi-largeur :

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{N}{2\,a.e} + \dfrac{3T.x.z}{2\,a^3.e} \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = \dfrac{3T}{4\,a^3.e}\,(a^2 - z^2) \end{cases} \qquad (43)$$

Les principaux caractères analytiques des courbes isochromatiques ont déjà été signalés. Etant donné l'intérêt de cette question, il nous a paru utile de les reproduire ici et de les étendre quelque peu. De plus, il nous a paru nécessaire de présenter de nombreuses photographies obtenues au banc photo-élastique. De cette manière, l'aspect photo-élastique des régions des points d'inflexion d'une pièce droite en flexion plane composée se trouve définitivement fixé.

*Remarque.*

On peut obtenir les expressions générales des tensions par une autre voie. En effet, en supposant la pièce infiniment longue, on trouve, à l'aide des conditions aux limites, que la fonction d'Airy du cas est :

$$A \equiv + \frac{T}{4\,a^3}\,z^3.x + \frac{N}{4\,a}\,.\,z^2 - \frac{3T}{4\,a}\,z.x$$

On peut, notamment, l'obtenir à partir de l'expression générale de la fonction d'Airy sous forme de polynôme en $z$ et $x$ ou sous forme de série de Fourier généralisée en $r$ et $\alpha$. Il suffit pour cela d'identifier la résultante des efforts sur la section à l'infini, avec la limite vers laquelle tend l'intégrale des tensions le long de la section droite, lorsque cette section s'éloigne à l'infini.



## 23. — COURBES ISOCHROMATIQUES OU D'EXTINCTION.

Ces courbes sont des courbes d'égale valeur de la tension tangentielle maximum $\tau_{I\,III}$, c'est-à-dire de la différence des tensions principales $|\,\sigma_I - \sigma_{III}\,|$.

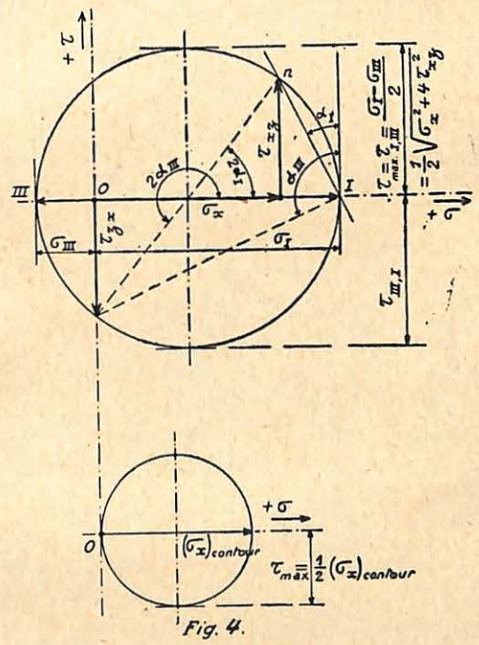



Fig. 21. — Etude graphique de la distribution des tensions.

En un point quelconque de la pièce, la tension tangentielle maximum est donnée par [8], formule $II_{20}$, page 152 (fig. 20 et 21) :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau_{xz}^2} \qquad (44)$$

Dans cette dernière expression, remplaçons $\sigma_x$ et $\tau_{xz}$ par leurs valeurs (43). Il vient :

$$|\tau_{max}| = \frac{3}{4}\frac{T}{a.e}\sqrt{\left(\frac{x}{a}.\frac{z}{a}+\frac{1}{3}.\frac{N}{T}\right)^2+\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2} \tag{45}$$

Donc si nous posons :

$$|\beta| = \frac{\tau_{max}}{\frac{3}{4}.\frac{T}{a.e}} \tag{46}$$

chaque courbe isochromatique correspond à une cote $\beta$ telle que :

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x}{a}.\frac{z}{a}+\frac{1}{3}.\frac{N}{T}\right)^2+\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2} \tag{47}$$

Cette relation résolue par rapport à $x/a$ donnera :

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{z/a}\left\{-\frac{1}{3}.\frac{N}{T} \pm \sqrt{\beta^2-\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2}\right\} \tag{48}$$

Les courbes isochromatiques constituent donc un groupe de courbes cotées en $\beta$. Nous avons choisi la forme de $\beta$ de façon à éliminer du problème la valeur absolue des grandeurs et ne conserver que leurs valeurs relatives, seules en jeu pour l'étude des propriétés intrinsèques des points d'inflexion.

L'équation (48) montre que les courbes isochromatiques ont le point d'inflexion O comme centre de symétrie.

Le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque vaut :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\dfrac{2\,[1-(z/a)^2]}{\sqrt{\beta^2-[1-(z/a)^2]^2}} - \dfrac{x/a}{(z/a)^2}} \tag{49}$$



Les isochromatiques présentent les particularités suivantes :

1° *Sur chaque bord de la pièce*, c'est-à-dire pour $z/a = \pm 1$, *il existe un point neutre non sollicité*, donc de cote $\beta = 0$. Ils ont pour abscisse $\pm \frac{Q}{3}.\frac{N}{T}$. La droite qui les joint passe par l'origine et a pour pente $-\frac{3T}{N}$. Dons, s'ils sont obtenu expérimentalement avec une précision suffisante, *l'inclinaison de la droite qui les joint permet de contrôler la valeur de N/T du cas.*

2° Lorsque $x$ et $z$ tendent vers 0, $\beta$ prend la valeur :

$$\beta_0 = \sqrt{\left(\frac{N}{3T}\right)^2+1} \tag{50}$$

Cette valeur est toujours supérieure à l'unité. Si on l'introduit dans l'équation (47), on obtient comme isochromatique passant par l'origine :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^4+\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-2\right]\left(\frac{z}{a}\right)^2+\frac{2}{3}.\frac{N}{T}.\frac{x}{a}.\frac{z}{a} = 0 \tag{51}$$

ce qui peut se décomposer en deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{z}{a} = 0 \\[2ex] \dfrac{x}{a} = \dfrac{-\dfrac{N}{3T} \pm \sqrt{\left(\dfrac{N}{3T}\right)^2+2\left(\dfrac{z}{a}\right)^2-\left(\dfrac{z}{a}\right)^4}}{\left(\dfrac{z}{a}\right)} \end{cases} \tag{52}$$

La première de ces deux équations représente l'axe de la pièce. Celui-ci est donc une isochromatique de cote $\beta_0$.

La seconde de ces deux équations représente une courbe isochromatique ayant même cote que l'axe. Cette courbe a la forme d'un S très allongé; elle joint les deux points à l'infini sur l'axe en suivant le trajet (fig. 22, 23, 24, 25, 26, 27) :

$$+\infty \text{ BS' SOS'' S''' D} - \infty$$

Les parties S'B et S'''D ont pour asymptote l'axe de la pièce.

La partie SOS'' voisine du point d'inflexion a une forme en S très caractéristique.

Dans la région voisine des points neutres C, la courbe sort de la partie utile de la pièce.

*Elle coupe l'axe des z au point d'ordonnée* $z = \pm a\sqrt{2}$, *indépendant de la valeur du rapport* N/T.

Pour connaître la tangente à l'origine à cette branche de l'isochromatique $\beta_0$, on calcule la valeur correspondante de $dz/dx$ et l'on trouve après d'assez longs calculs :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{T} \qquad (53)$$

En comparant avec le coefficient angulaire de la droite qui joint les points neutres, on voit que :

*La droite des points neutres et la tangente à l'isochromatique* $\beta_0$ *passant par l'origine sont orthogonales.*

3° Les courbes ayant une cote $\beta > \beta_0$ sont toutes asymptotiques à l'axe des $x$. Chacune d'elles présente deux branches extérieures à la courbe en S de cote $\beta_0$.

Ces branches sortent de la pièce entre les points :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{T} + \beta \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{T} - \beta$$

et les points symétriques par rapport à l'origine.



4° Toutes les courbes de cote $\beta < \beta_0$ se composent de deux branches entièrement séparées et entourant chacune l'un des points neutres. *Lorsque* $\beta \gtreqless 1$, *elles ont un point à l'infini* et sont asymptotiques à l'axe des $x$. Lorsque $\beta < 1$, *les courbes sont fermées, sans point à l'infini*, et se composent encore de deux branches entourant chacune un des points neutres.

En effet, s'il y a un point à l'infini, il se trouve sur l'axe $Ox$, étant donné que les isochromatiques ne peuvent se couper, et que les deux branches de l'isochromatique $\beta_0$ entre lesquelles elles sont entièrement comprises se rejoignent sur l'axe à l'infini. Il n'y a donc de point à l'infini que si à $z/a = 0$ correspond une valeur réelle et infinie de $z/a$, c'est-à-dire, d'après l'équation (48), lorsque :

$$\beta^2 - [\,1 - (\frac{z}{a})^2\,]^2$$

reste positif lorsque $z/a$ tend vers 0, c'est-à-dire si $\beta \gtreqless 1$.

5° En un point du bord le coefficient angulaire de la tangente à l'isochromatique vaut $dz/dx = -a/x$. On voit immédiatement que *la tangente à l'isochromatique au point d'intersection avec le bord de la pièce coupe l'axe des z en un point fixe* J, indépendant des valeurs de $\beta$ ou de N/T, et situé à une distance $2a$ de l'origine.

6° Toutes les lignes isochromatiques coupent le contour de la pièce de part et d'autre du point neutre C, en des points dont la distance à ce point neutre représente la cote $\beta$ multipliée par la demi-largeur $a$ de la pièce.

En effet, le long du contour la tension maximum est égale à :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_x)_{contour} = \frac{1}{2}\left[\frac{N}{\Omega} + \frac{M.v}{I}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2\,a.e} + \frac{6T.x}{4\,a^2.e}\right] \qquad (54)$$

Donc, le long du contour, la cote $\beta$ varie linéairement suivant la formule :

$$\beta = \frac{x}{a} + \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{T} \qquad (55)$$

Les courbes isochromatiques dont les cotes diffèrent d'un même nombre aboutissent au contour en des points également écartés l'un de l'autre.

*Remarque importante.*

Dans toutes les parties droites d'une pièce, sollicitée en flexion plane composée, les diverses lignes isochromatiques ou d'extinction, vues à un moment déterminé au banc photo-élastique, sont toutes, sur le bord de la pièce, également écartées l'une de l'autre. En effet, elles correspondent à des valeurs régulièrement étagées de $\tau_{max}$ qui au bord est proportionnel au $(\sigma_x)_{contour}$, donc leurs cotes $\beta$ diffèrent l'une de l'autre de la même quantité.

*Commentaire général des figures et des photographies des lignes isochromatiques.*

Etant donnée l'importance de bien fixer les aspects photo-élastiques de la région du point d'inflexion, nous donnons ci-après de nombreuses photographies et les tracés théoriques de cinq cas différents par la valeur de N/T.

Dans les figures théoriques 22, 23, 24, 25 et 26, nous avons présenté :

En trait fort, le cheminement général bouclé (y compris l'axe);
En trait d'axe, la ligne des points neutres COC;
En trait plein ordinaire, diverses courbes isochromatiques;
En trait pointillé, la courbe spéciale $\beta = 1$.

Dans ces figures, les deux flèches, opposées l'une à l'autre, représentent l'alignement des vecteurs Q qui s'opposent l'un à l'autre au point d'inflexion.

Sur ces figures, la croix centrale se présente en noir ou en clair au cours de l'examen photo-élastique.

Les diverses courbes tracées sur ces figures ont été calculées par points.

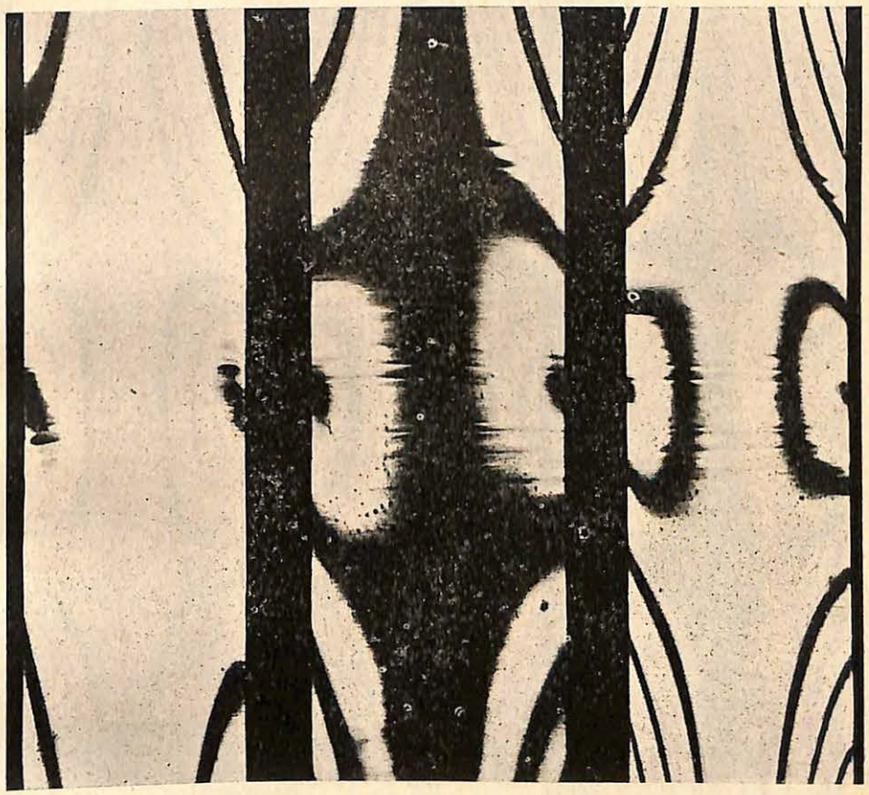
Il est à remarquer que les planches et les photographies sont présentées en positions symétriques les unes des autres.

*Analyse de chacun des cas présentés.*

Les planches présentent les cas suivants qui semblent couvrir toutes les possibilités.



I. Cas $\frac{N}{T} = 0$.

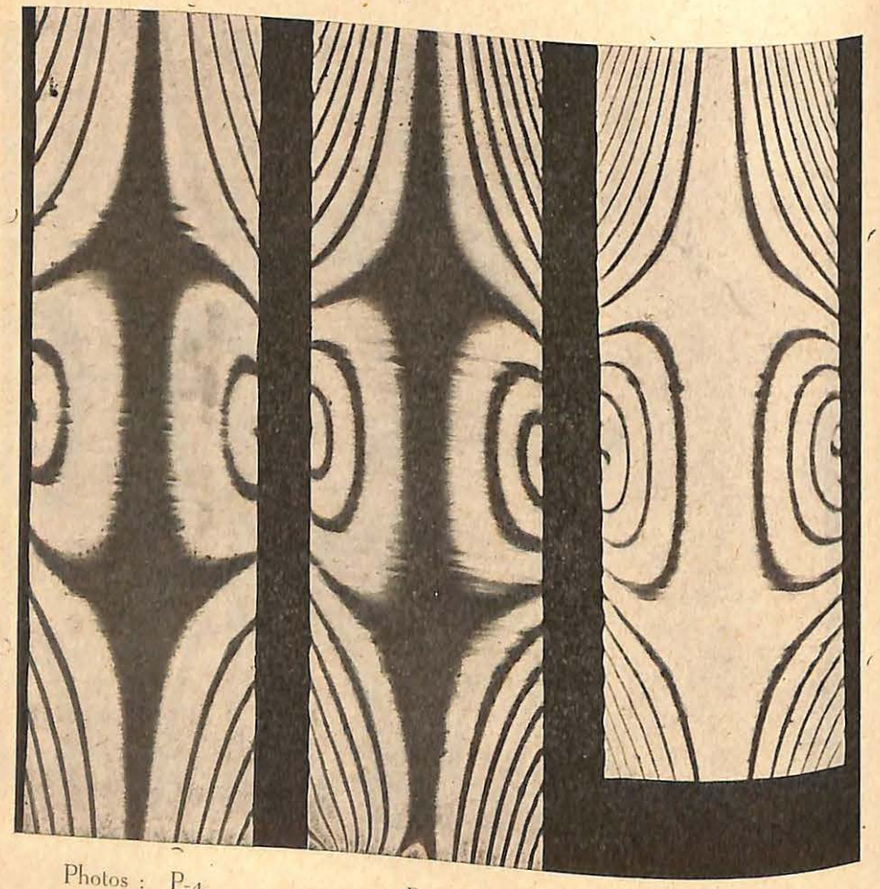


Photos : P-1. P-2. P-3.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figure 22.)

I. Cas $\frac{N}{T} = 0.$



Photos : P-4. P-5. P-6.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.
(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figure 22.)

I. Cas $\frac{N}{T} = 0.$

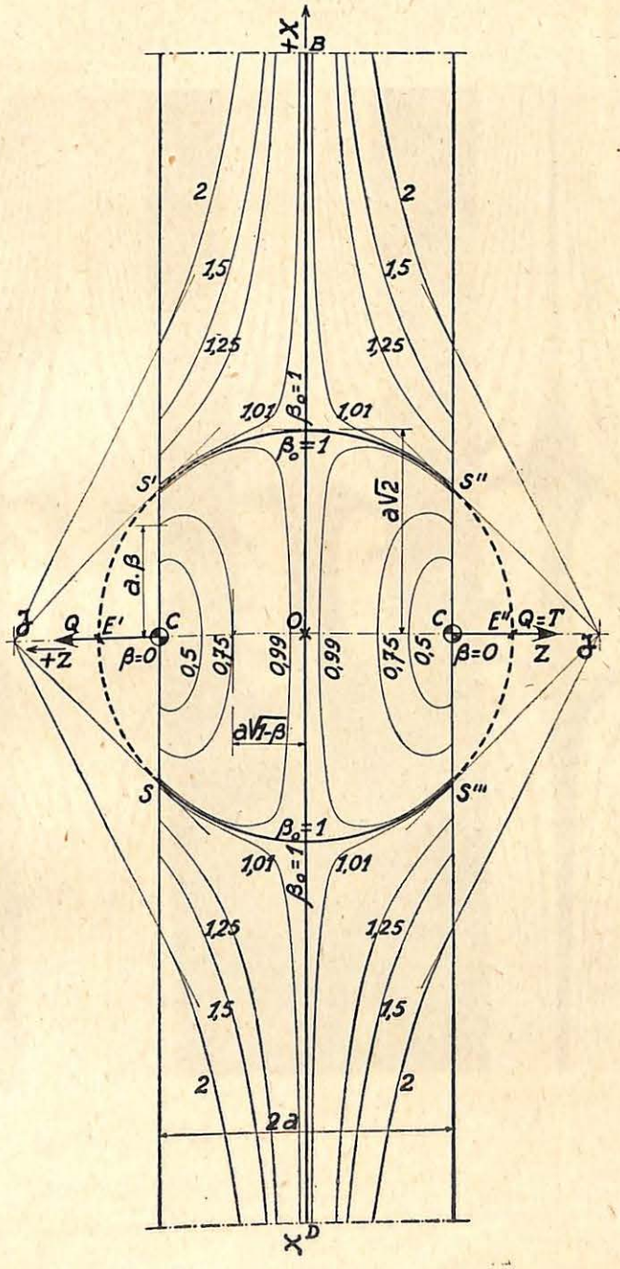
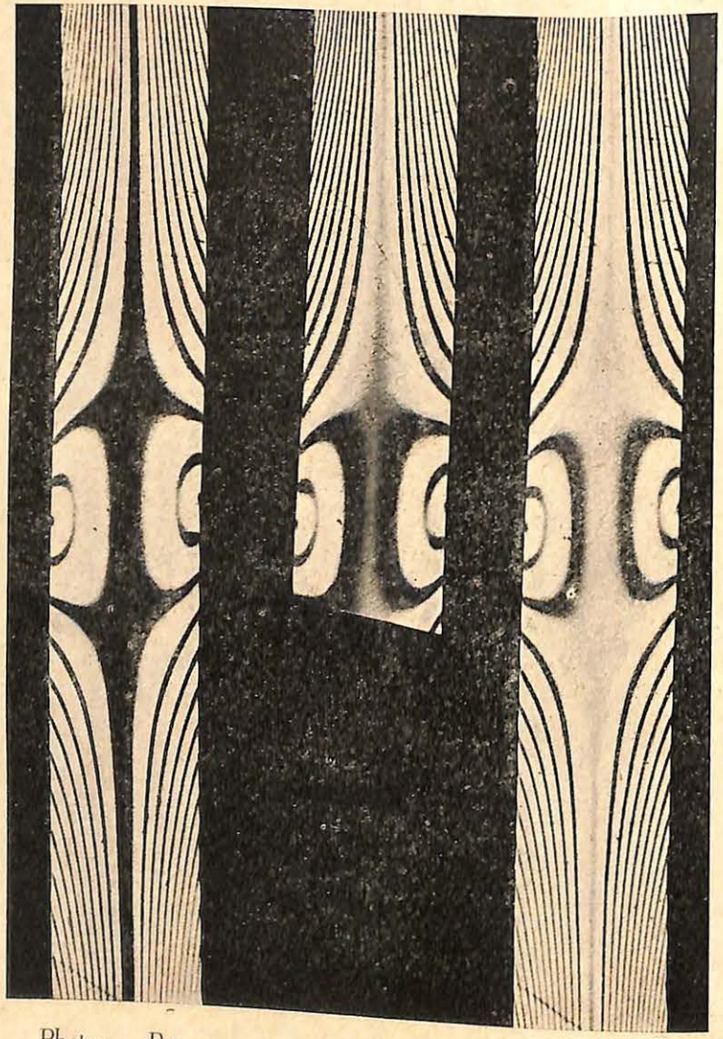



Fig. 22. — Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

II. Cas $\frac{N}{T} = -0{,}3.$



Photos : P-7. P-8. P-9.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.
(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figure 23.)

II. Cas $\frac{N}{T} = -0{,}3.$

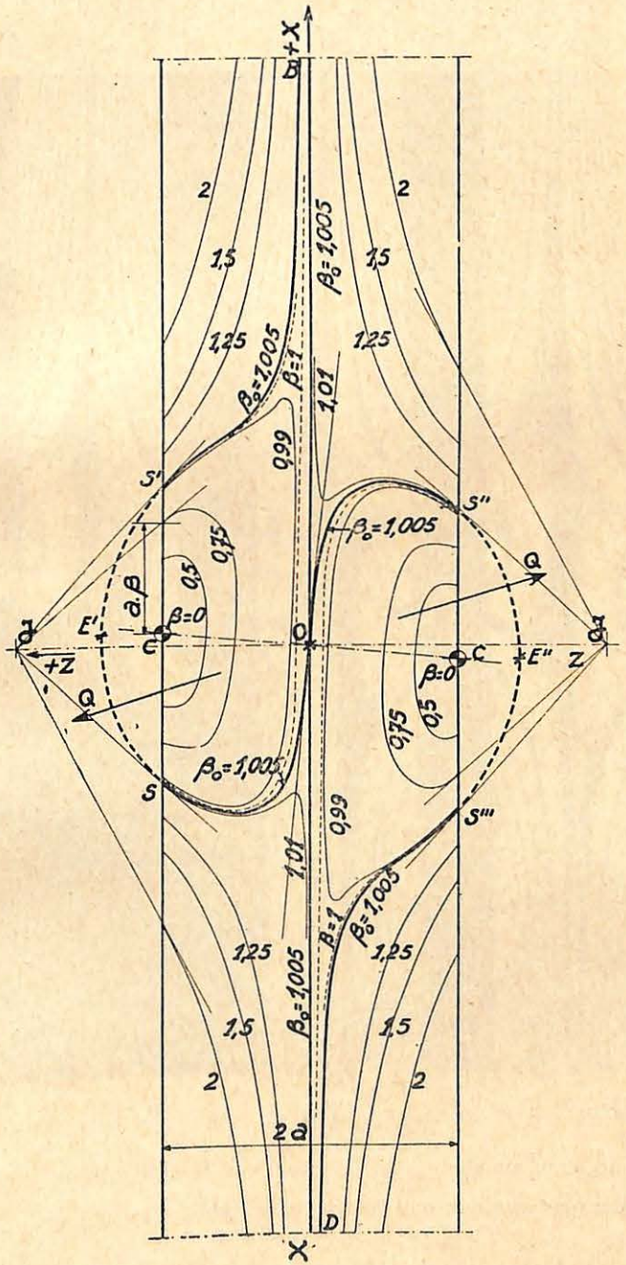
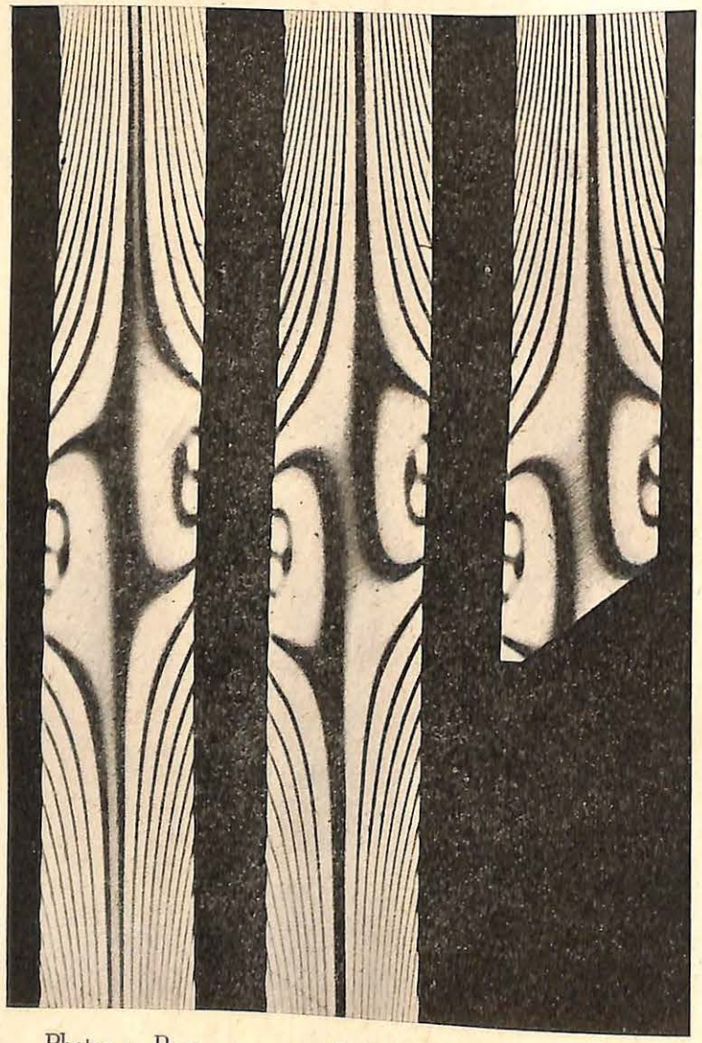



Fig. 23. — Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

III. Cas $\frac{N}{T} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.



Photos : P-10. P-11. P-12.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.
(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figue 24.)

III. Cas $\frac{N}{T} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

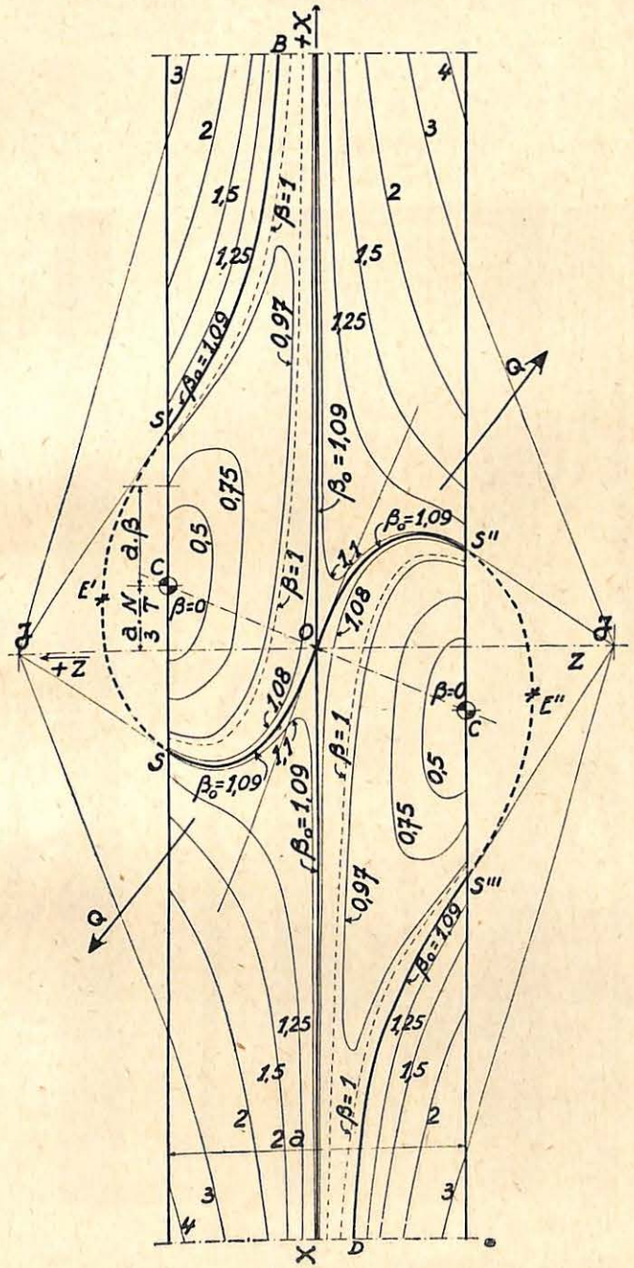
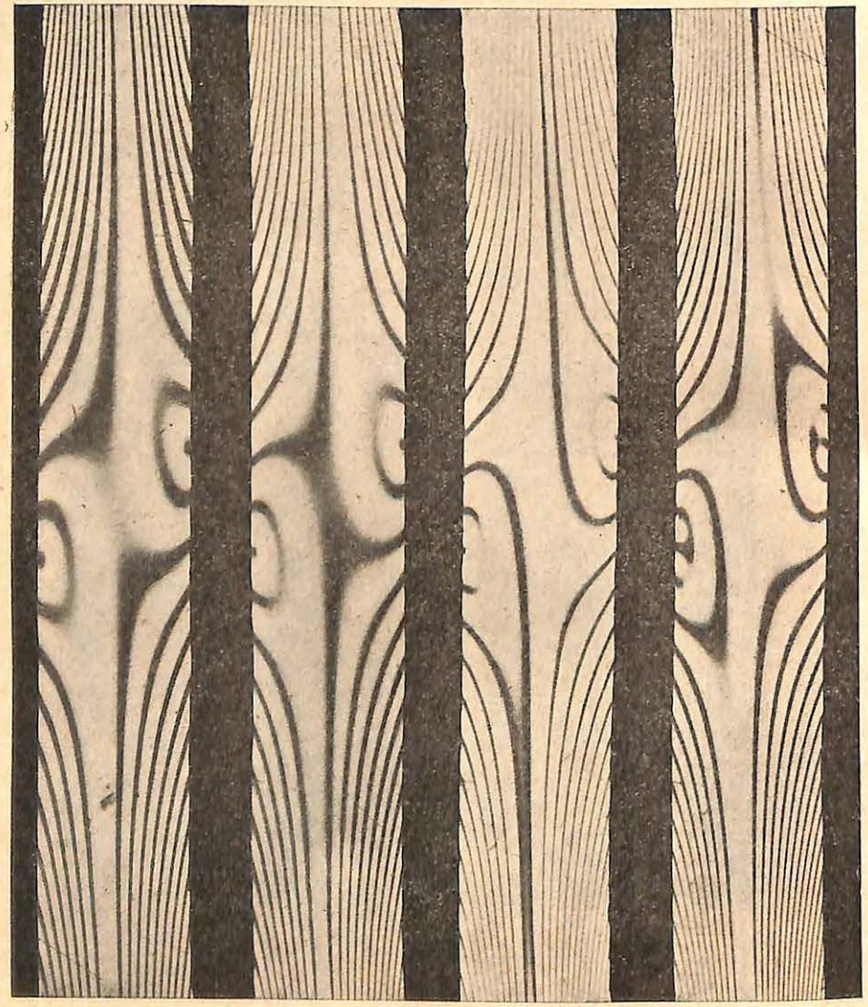



Fig. 24. — Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

IV. Cas $\frac{N}{T} = -2$.



Photos : P-13. P-14. P-15. P-16.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.
(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figure 25.)

IV. Cas $\frac{N}{T} = -2$.

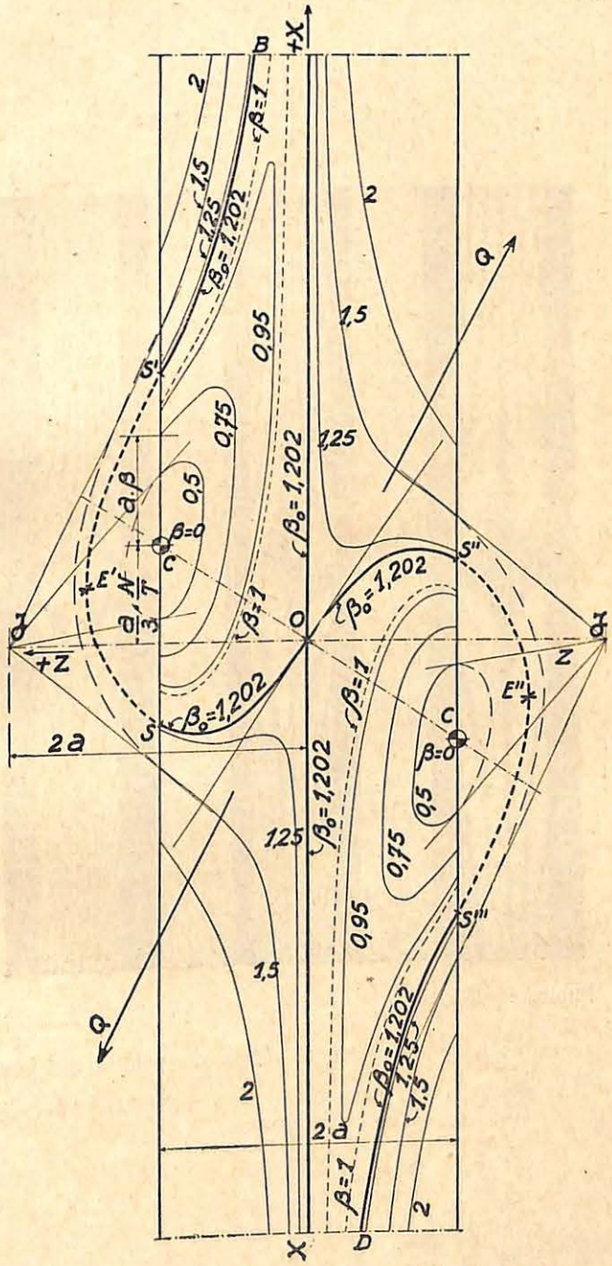
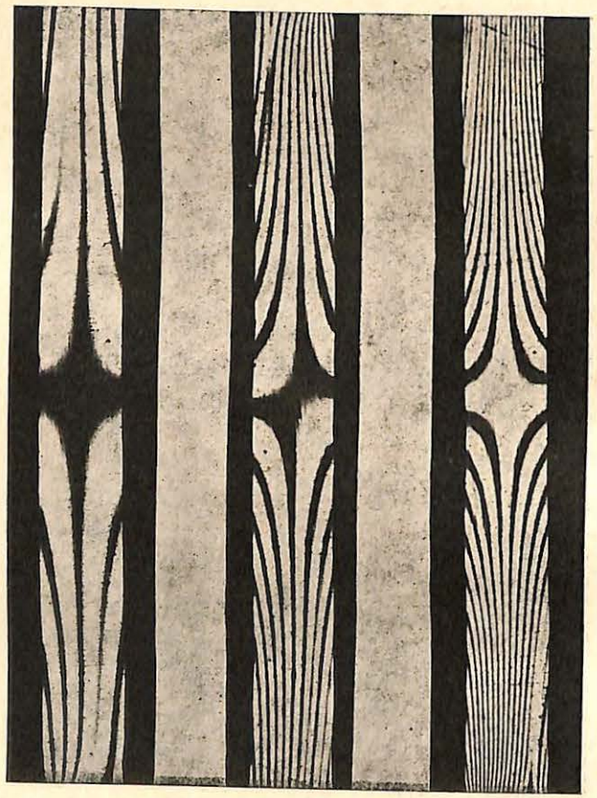



Fig. 25. — Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

V. Cas $\frac{N}{T} = -18{,}45.$



Photos : P-17. P-18. P-19.

Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

(Les photographies sont présentées en position symétrique de la figure 26-27.)

V. Cas $\frac{N}{T} = -18{,}45.$

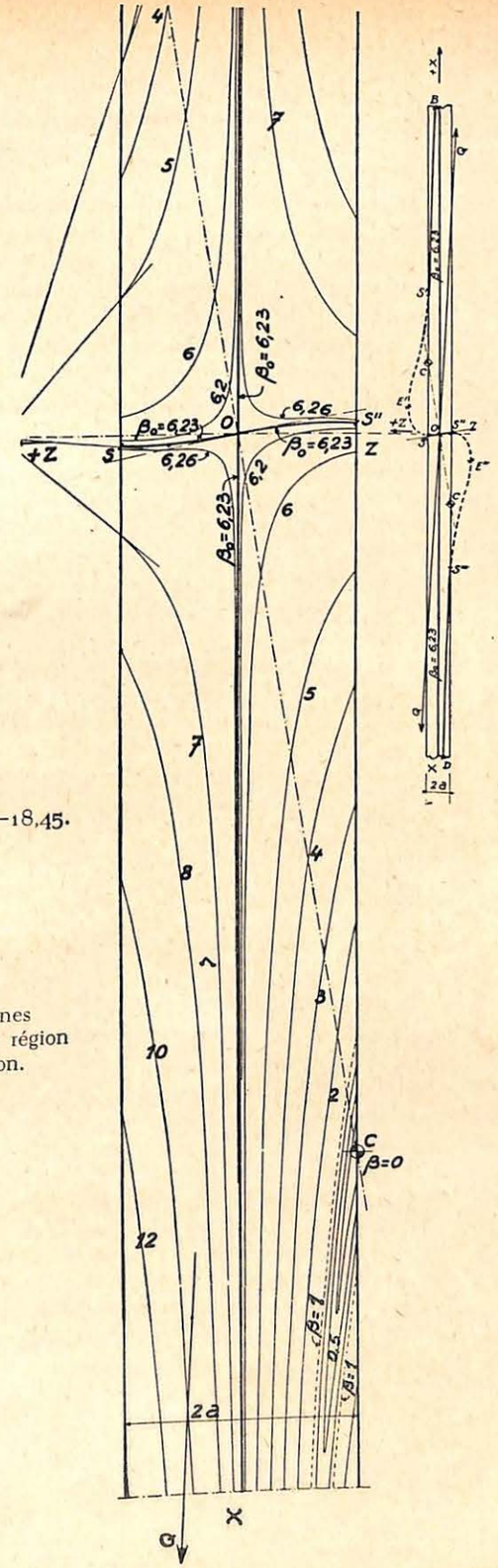



Fig. 26-27. — Lignes isochromatiques de la région du point d'inflexion.

*Cas I.* $\frac{N}{T} = 0$, effort longitudinal nul (fig. 22 et photos P-1 à P-6).

Ce cas est fort important. C'est le cas limite où la flexion composée devient de la flexion simple. Il se présente notamment dans tous les montants d'une poutre Vierendeel de hauteur constante, à l'aplomb desquels il n'y a pas de force extérieure appliquée. Il offre comme particularité que le cheminement bouclé a la forme limite comprenant l'axe de la pièce et une circonférence de rayon $a\sqrt{2}$.

Les photographies montrent plusieurs aspect photo-élastiques successifs à charge croissante. Ces photographies confirment remarquablement l'aspect prévu analytiquement.

*Cas II.* $\frac{N}{T} = -0{,}5$ (fig. 23 et photos P-7 à P-9).

*Cas III.* $\frac{N}{T} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ (fig. 24 et photos P-10 à P-12) (1).

*Cas IV.* $\frac{N}{T} = -2$ (fig. 25 et photos P-13 à P-16).

Valeurs moyennes de l'effort longitudinal.

Ces trois cas sont des cas généraux au point de vue des lignes isochromatiques.

Ces cas se présentent en application pour les montants d'une poutre Vierendeel, de hauteur constante, à l'aplomb desquels est concentrée une force extérieure. Ils se présentent fréquemment aussi quand la bride est polygonale. Ces cas se produisent encore, pour le cas de hauteur constante, dans les panneaux voisins des extrémités de la poutre. On voit donc combien est importante l'étude

(1) Ce cas correspond à ce que, dans notre mémoire [8], nous avons appelé le cas de passage au point de vue du réseau des lignes isostatiques. Pour des valeurs de N/T inférieures à celle-ci, toutes les isostatiques avaient au moins une extrémité à l'infini; pour des valeurs de N/T supérieures à celle-ci, un groupe d'isostatiques restait entièrement à distance finie; pour cette valeur de N/T, il existe une isostatique com-



complète de ces cas. Nous rappelons en particulier que le décalage des deux points neutres C l'un par rapport à l'autre est d'autant plus grand que l'effort longitudinal N est plus grand par rapport à l'effort tranchant T.

*Cas V.* $\frac{N}{T} = -18{,}45$ (fig. 26 et 27, photos P-17 à P-19).

Grande valeur de l'effort longitudinal.

Nous avons présenté ce cas séparément, car il est fréquent dans les ossatures de bâtiments à nombreux étages, ainsi que dans les brides des poutres Vierendeel de forme polygonale et même de hauteur constante.

L'aspect photo-élastique est ici assez différent des cas précédents, parce que les points neutres C sont rejetés fort loin l'un de l'autre, de sorte que, à certains moments au point l'inflexion, les bandes d'extinction forment une croix noire presque doublement symétrique. La figure 26, tracée à l'échelle des figures 22 à 25, est très caractéristique à cet égard. La figure 27 donne d'ailleurs l'aspect de la pièce à plus petite échelle.

Au fur et à mesure que N/T grandira encore, les points neutres C

posée de : le bord de la pièce de l'infini au premier point neutre, la droite joignant les points neutres, puis l'autre bord de la pièce du second point neutre jusqu'à l'infini.

Il convient de faire remarquer ici que la formule (18) de ce mémoire est à lire :

$$x = \frac{\frac{3T}{2a^3e}(a^2-z^2)}{\frac{3T}{2a^3e}zx + \frac{N}{2ae}}$$

au lieu de :

$$x = \frac{\frac{3T}{4a^3e}(a^2-z^2)}{\frac{3T}{2a^3e}zx + \frac{N}{2ae}}$$

Il en résulte que le cas de passage correspond en réalité à $N/T = \sqrt{3}$; les cotes des isoclines sont à modifier légèrement et l'aspect du champ des isostatiques est un peu altéré.

Les formules subséquentes sont à modifier en conséquence.

s'écarteront davantage. Aussi il pourrait arriver qu'ils s'éloignent au point de pénétrer dans les congés de raccordement des diverses pièces constituant l'ossature.

Le présent mémoire ne traite que la région des points d'inflexion d'une pièce droite prismatique, de sorte que dans les ossatures à angles rigides, dans lesquelles le point d'inflexion d'une pièce s'approcherait d'un congé de raccordement, les aspects photo-élastiques de cette région seraient plus ou moins fortement altérés par rapport aux aspects que montrent les diverses photographies contenues dans cette note. Cependant, les caractères généraux se maintiendraient. Mais il arrive que dans ces ossatures, certaines pièces ne présentent pas de point d'inflexion parce que le vecteur Q coupe l'axe de la pièce en dehors de la région utile.

C'est notamment le cas dans certaines parties des membrures d'une poutre Vierendeel à bride polygonale. L'aspect photo-élastique révélera cette situation, puisqu'il ne présentera pas les caractères remarquables que nous venons de décrire à nouveau.

*Remarque importante.*

Toute cette théorie est établie exclusivement pour le cas d'une pièce droite longue, mais la forme étudiée ne présente pas toujours ce caractère, loin de là. Ainsi, pour ne prendre que la question qui nous occupe, les anneaux ne sont plus des pièces droites. Les lignes isochromatiques ne présenteront donc plus tout à fait les mêmes aspects que ceux que nous venons de rappeler d'après le mémoire précité.

Cependant, quand la courbure relative est faible, les lignes isochromatiques autour des points neutres ne sont pas fort altérées, comme en font foi les photographies P-20 à P-27. En conséquence, on pourra encore se baser très approximativement sur la position des points neutres aux bords de l'anneau pour en déduire la position du point d'inflexion éventuel, exactement comme cela serait fait si la pièce était droite au lieu d'être courbe. D'ailleurs, ainsi que l'étude détaillée des photographies le montrera, en suivant cette méthode, les résultats du calcul seront remarquablement confirmés, pourvu que la courbure de l'anneau ne soit pas trop forte, auquel cas il faudrait modifier l'étude théorique des points d'inflexion.

*On peut dire que pour les anneaux auxquels la théorie ordinaire de la résistance des matériaux est applicable (c'est-à-dire tels que $\lambda = r_1/r_e \lesseqgtr 0{,}6$), les points d'inflexion peuvent être étudiés comme si la pièce était droite.*



## C. — TRAJECTOIRES DES TENSIONS PRINCIPALES OU LIGNES ISOSTATIQUES

24. — En fait, dans le cas qui nous occupe, il importe peu de déterminer exactement ces trajectoires, mais il est fort utile d'en déterminer *l'allure*. Celle-ci est, en effet, la clef de la compréhension parfaite de la manière dont la pièce organise sa résistance à la sollicitation extérieure. L'allure de ces lignes est commandée principalement par les caractères des *points singuliers* de leur réseau ([8], §§ 187 à 191; [10] et [11]).

Ces points singuliers diffèrent suivant que l'anneau est mince ou épais.

Dans le cas de l'anneau mince ($\lambda = r_1/r_e \lesseqgtr 0{,}724$), le réseau comprend au total seize points singuliers (fig. 28) :

Sur le diamètre de charge OX, les points I, II, III;

Sur le diamètre OY, normal au diamètre de charge, les points IV;

Sur les bords intrados et extrados, les points V et VI.

Les points I sont du type de demi-centres de rayonnement; ils sont donc des demi-points d'ordre $n = +1$.

Les points II sont du type de centres étoilés à trois branches; ils sont donc d'ordre $n = -1$.

Les points III sont du type de centres focaux; ils sont d'ordre $n = +2$.

Les points IV sont du même type que les points III.

Les points V et VI sont des demi-centres étoilés à trois branches; ils sont donc des demi-points d'ordre $n = -1$.

Les points I sont les points d'application des charges.

Les points II sont assez difficiles à dépister, car ils sont très proches des points I et sont, en général, cachés dans la zone en plasticité; on sait cependant nettement qu'ils existent (en phase élastique) ([6] et [12]).

Les points III et IV apparaissent très nettement sur les photographies photo-élastiques (voir photos P-22 à P-31).

Fig. 28. — Champ des lignes isostatiques pour un anneau mince.

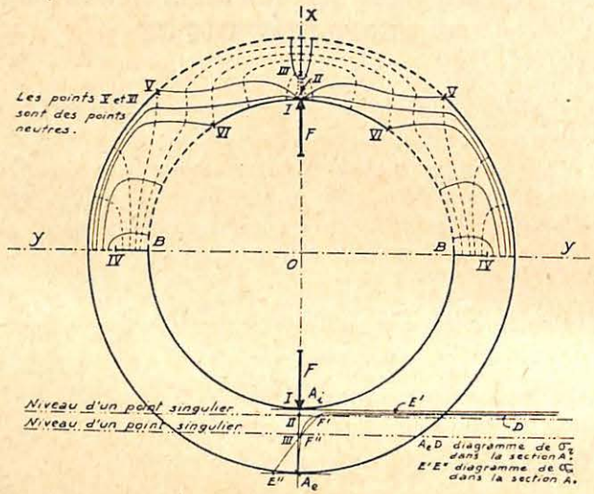



Fig. 29. — Champ des lignes isostatiques pour un gros anneau.



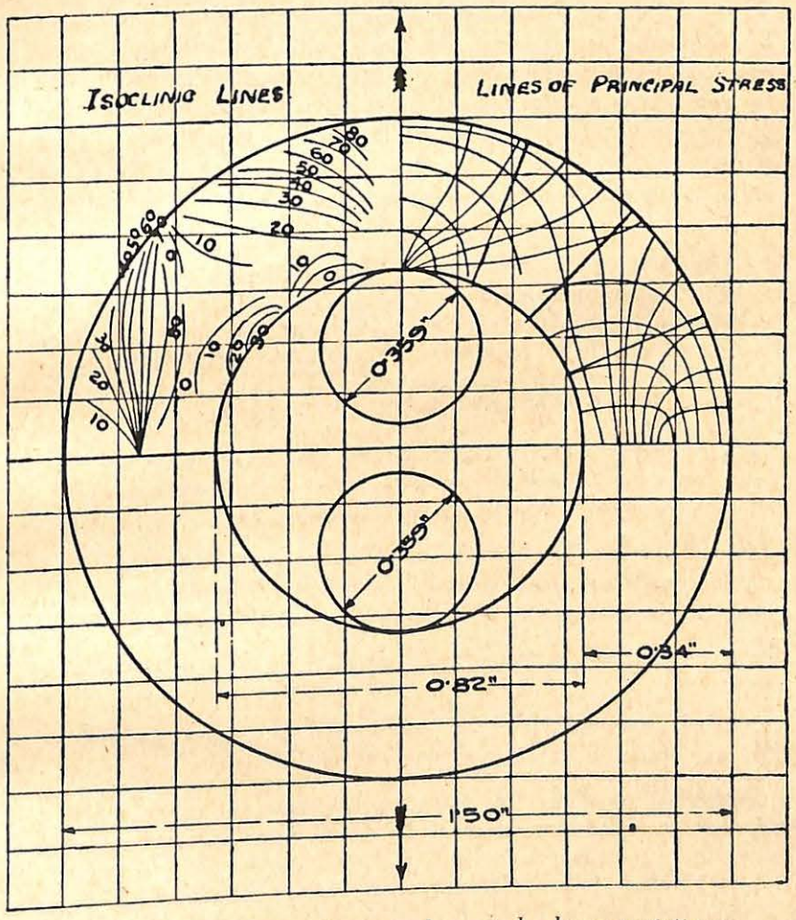



Fig. 30. — Champ des lignes isoclines et des lignes isostatiques pour un anneau épais (d'après Coker).

Les points V et VI apparaissent également manifestement; ce sont d'ailleurs les points neutres sur les contours dont il a été largement parlé ci-avant.

Dès que tous ces points sont définis, on connaît déjà les allures des lignes isostatiques dans leurs environs; il suffit de faire appel aux caractères généraux connus pour ces divers points. Cela donne lieu à la figure d'amorçage des tracés. Ceux-ci sont alors complétés systématiquement pour satisfaire aux allures imposées aux environs des points singuliers.

Les tracés ainsi établis sous forme provisoire sont alors retouchés en prenant quelques lignes isoclines.

La figure 28 montre pourquoi il y a trois points singuliers dans la section AA quand l'anneau est mince.

Soit $A_eD$ la courbe représentative de la tension radiale $\sigma_r$ dans la section AA. Elle est nulle à l'extrados et infinie à l'intrados (point de contact). D'autre part, représentons par E'E'' la loi de variation de la tension $\sigma_a$ dans cette même section AA, tension due à la flexion plane composée. Quand l'anneau est relativement mince, et que sa forme puisse être considérée comme n'étant pas trop éloignée de celle d'une pièce droite, cette tension $\sigma_a$ est assez grande, et la courbe E'E'' recoupe deux fois la courbe de $\sigma_r$, comme le montre la figure 28. En chacun de ces points F' et F'', la différence des deux tensions normales $\sigma_r - \sigma_a = \sigma_I - \sigma_{II} = 0$. Ce sont les points singuliers II et III. Le point singulier I se trouve en $A_i$ même, là où cette différence est infinie.

Quand l'épaisseur relative de l'anneau augmente, l'importance relative des tensions normales $\sigma_a$ diminue, et les deux points F' et F'' se rapprochent l'un de l'autre. A un moment donné, ils se confondent (quand les deux courbes $A_eD$ et E'E'' sont tangentes); leurs ordres étant $+1$ et $-1$, l'ordre résultant est zéro, c'est-à-dire qu'ils n'existent plus. A fortiori, quand le diagramme des tensions se présente comme indiqué figure 29, les points II et III ont disparu. Cela se remarque sur les photographies relatives aux anneaux pour lesquels $\lambda \leqq 0{,}636$ (P-24 à P-33).

Le réseau des lignes isostatiques est modifié en conséquence et devient celui indiqué par M. Coker en 1922 ([3], p. 26); il est reproduit à la figure 30, laquelle donne aussi les isoclines.



## D. — OBTENTION EXPERIMENTALE DES DIAGRAMMES DES TENSIONS CIRCONFERENTIELLES SUR LES BORDS INTRADOS ET EXTRADOS DE L'ANNEAU

25. — Lors de l'essai photo-élastique en lumière monochromatique polarisée circulairement, s'il y a des points neutres ou des points auxquels la différence des tensions principales $\sigma_I - \sigma_{II} = 0$, ces points sont les premiers où l'on aperçoit des taches d'extinction.

Il est à remarquer que si la sollicitation de la pièce varie homothétiquement, ces points noirs restent dans une position *fixe*.

26. — D'autre part, d'autres bandes d'extinction se signalent, qui, elles, se modifient profondément de forme lorsque la sollicitation, tout en restant homothétique, varie.

Dans le cas des anneaux, ces bandes d'extinction restent toutes dans le champ de la pièce; elles changent de forme lorsque la charge varie; elles sont obligées de se serrer d'autant plus que la pièce est fortement sollicitée, et en conséquence, la largeur de ces bandes décroît, rendant leur tracé de plus en plus précis.

Ces bandes arrivent aux points où, pour une sollicitation déterminée, la valeur de $\sigma_I - \sigma_{II}$ est un maximum. Donc, dans le cas de l'anneau, ces bandes naissent aux points intrados et extrados situés sur le diamètre de charge et sur le diamètre normal à celui-ci.

Au cours du changement de forme de ces courbes, que l'on peut très bien suivre sur les diverses photographies, elles viennent, dans le cas de l'anneau, se grouper en entourant les points neutres ou ceux auxquels $\sigma_I - \sigma_{II} = 0$.

On peut donc attribuer à chaque bande *un numéro d'ordre qui est celui d'arrivée.*

A un moment déterminé, les points neutres ou tels que $\sigma_I - \sigma_{II} = 0$ étant numérotés 0, les bandes d'extinction qui les entourent et qui en sont les plus proches seront numérotées 1, les suivantes 2, et ainsi de suite. L'aspect général des bandes d'extinction et l'évolution qu'elles ont subi lorsque la charge croissait, permet en outre de fixer le numéro de toutes les bandes, même de celles qui n'entourent pas les points noirs fixes.

Il apparaît donc que l'examen des courbes d'extinction en cours de formation permet de préciser de suite *la position des points neutres le long des contours de la pièce et celle des points les plus sollicités le long de ces contours.* Les premiers donnent en principe le moyen de mettre en place les points d'inflexion.

Mais, outre cela, on sait que d'une bande d'extinction à la suivante, il y a une variation constante de la différence des tensions principales donnée par la formule ([8], §§ 209 et 209*bis*) :

$$\Delta \mid \sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}} \mid = \frac{\lambda}{k.e} \qquad (55)$$

$\lambda$ étant la longueur d'onde de la lumière monochromatique, $e$ étant l'épaisseur de la plaque dans laquelle a été découpée la pièce et $k$ étant une constante spécifique de la matière.

Comme on le sait, dans la zone où le contour d'une pièce n'est pas chargé, il n'existe qu'une seule tension principale; celle agissant sur les facettes perpendiculaires au contour, l'autre est nulle. C'est le cas qui se présente pour les anneaux, sauf aux endroits où s'exerce le contact entre les charges extérieures et l'anneau. Mais ces contacts sont très localisés pour les anneaux qui sont en jeu ici. Il y a là une grande accumulation de lignes isochromatiques; cette zone aux alentours du point de contact entre très rapidement en plasticité quand la charge croît, auquel cas elle apparaît noire sur les photographies; cela empêche d'y distinguer clairement ce qui s'y passe. En conséquence, on fera ici abstraction de la zone de contact elle-même.

Puisque aux contours, sauf dans cette zone, une des tensions principales est nulle, soit $\sigma_{\mathrm{II}}$ par exemple, au point où une bande d'extinction aboutit au contour, *son numéro d'arrivée*, qui est en quelque sorte sa cote, *est représentatif de* $\sigma_{\mathrm{I}}$.

Ayant doté chaque courbe d'extinction du numéro qui est le sien, on peut donc tout le long du contour tracer à une échelle conventionnelle *le diagramme polaire de la tension dirigée tangentiellement au contour.* Ce diagramme passe évidemment par zéro aux points neutres.

La figure 31 montre en traits interrompus les résultats de l'application de ce procédé pour les anneaux tels que $\lambda = 0{,}501 \cong 1/2$.



Le diagramme en traits pleins donne les résultats du calcul fait par les formules de l'élasticité.

On voit l'excellente concordance entre les deux figures. Ceci confirme bien les résultats obtenus par le calcul et montre, d'autre part, l'utilité d'un essai photo-élastique. Si, par exemple, une pièce a une forme pour laquelle on ne peut calculer les tensions, un essai photo-élastique permet néanmoins de se représenter aisément la sollicitation au contour.

Le calcul a été effectué pour le cas où les forces agissent à l'intrados de l'anneau. Les points neutres se placent à l'intrados et à l'extrados respectivement aux angles polaires de 58°,2 et 45°,9.

L'expérience a donné pour ces mêmes angles et dans les mêmes conditions de sollicitation 58°,6 et 44° (photo P-27).

La concordance est donc excellente.

Diagramme polaire de la tension circonférentielle aux contours intrados et extrados.

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = \frac{1}{2}.$$

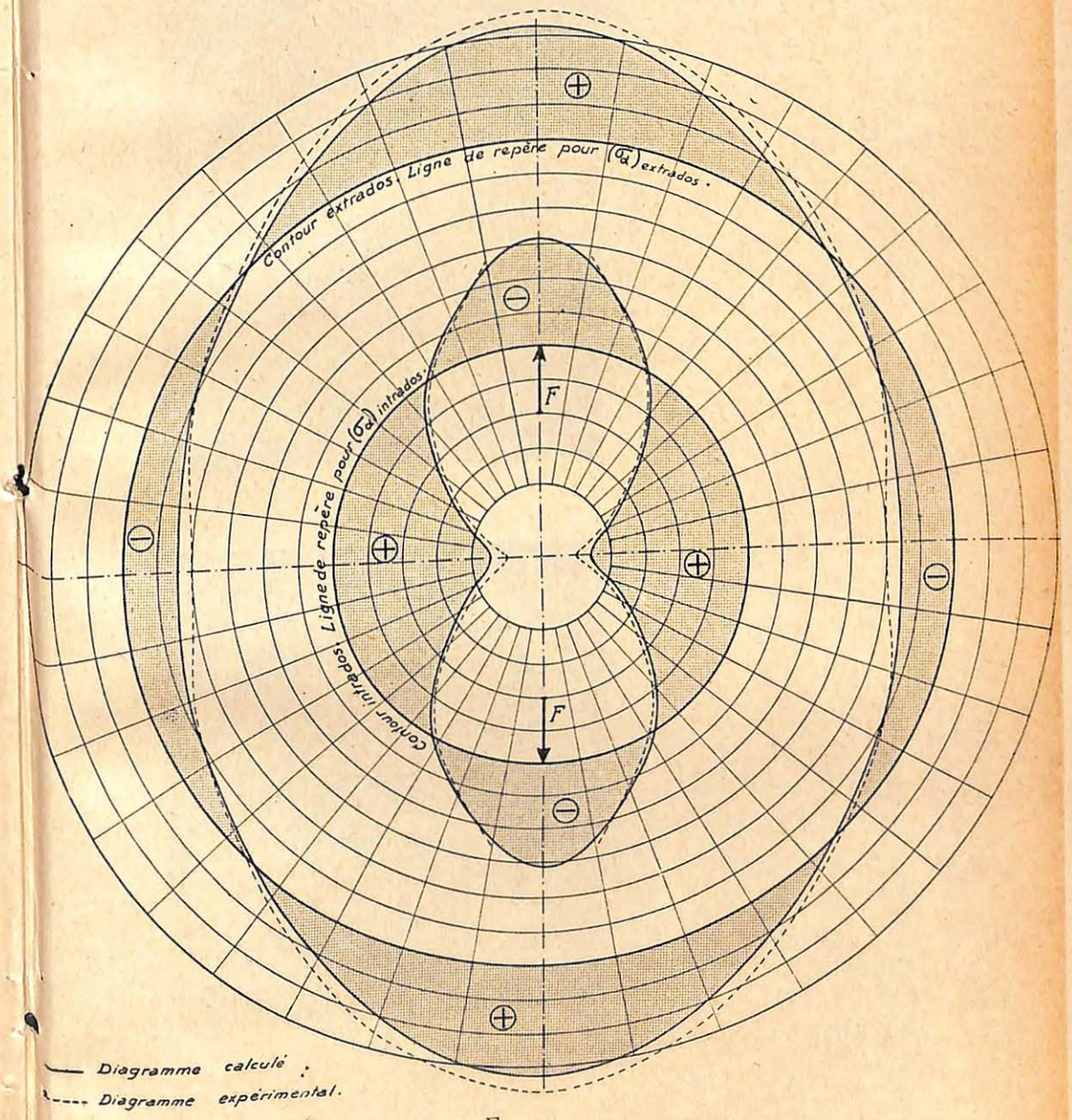
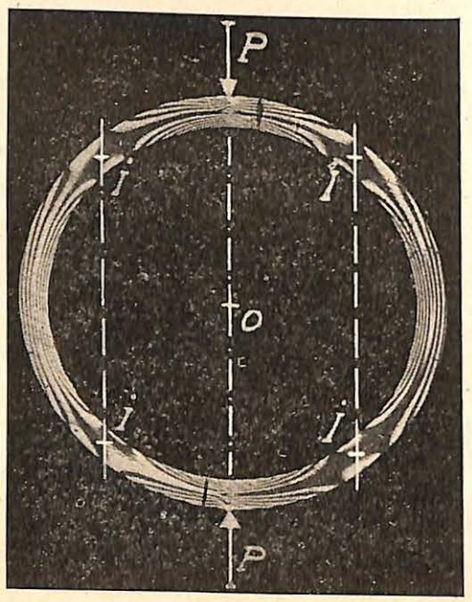



Fig. 31.

Photo P-20.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}845.$



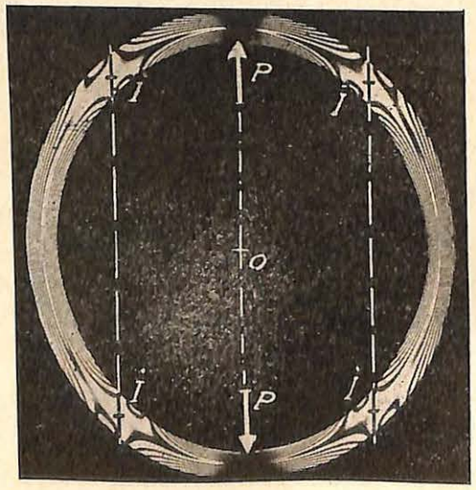




Photo P-21.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}845.$



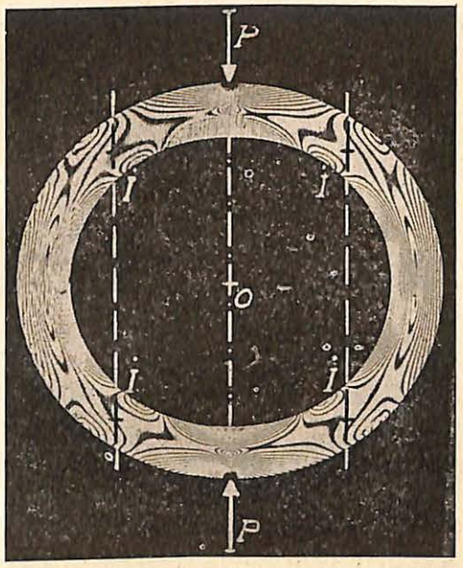



Photo P-22.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}724.$

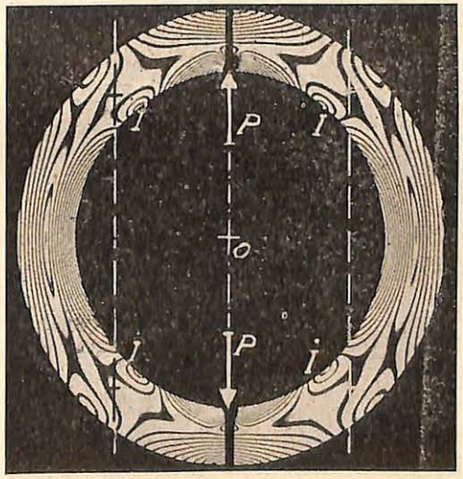



Photo P-23.

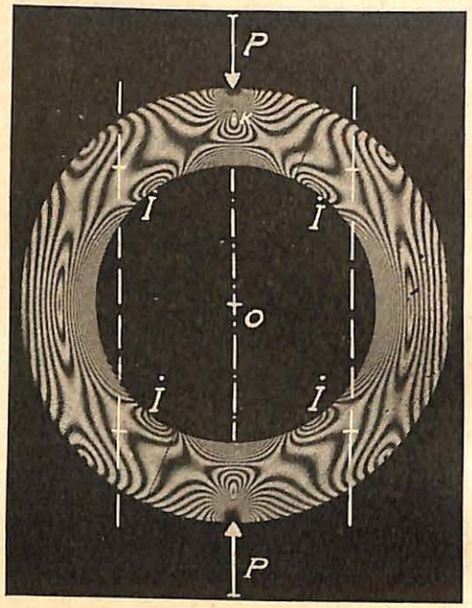
Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}724.$

Photo P-24.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_1}{r_e} = 0{,}636.$



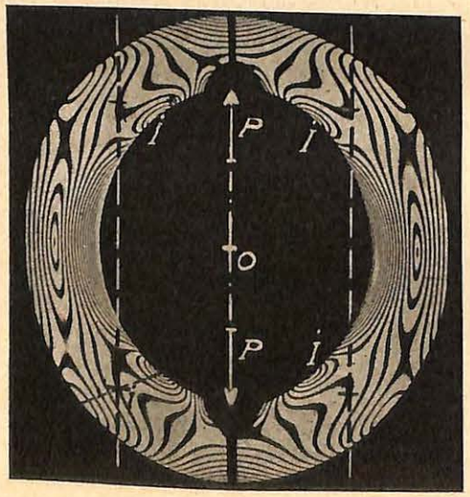




Photo P-25.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_1}{r_e} = 0{,}636.$



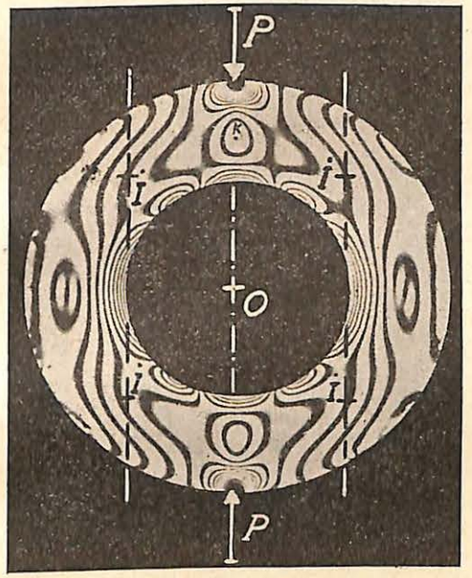



Photo P-26.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_1}{r_e} = 0{,}501.$

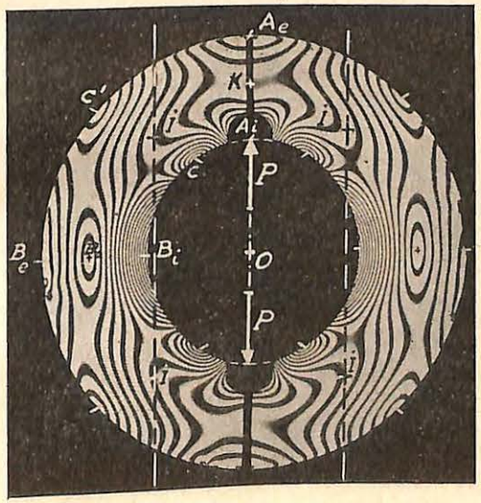



Photo P-27.

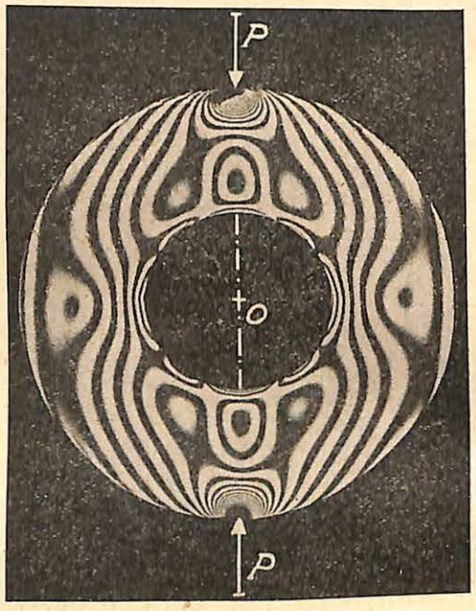
Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_1}{r_e} = 0{,}501.$

Photo P-28.

Lignes isochromatiques.

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}384.$$



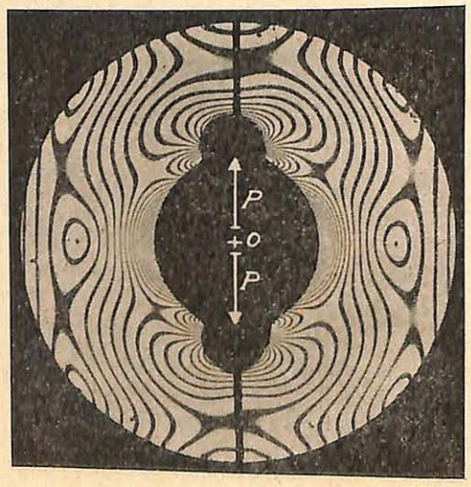




Photo P-29.

Lignes isochromatiques.

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}384.$$



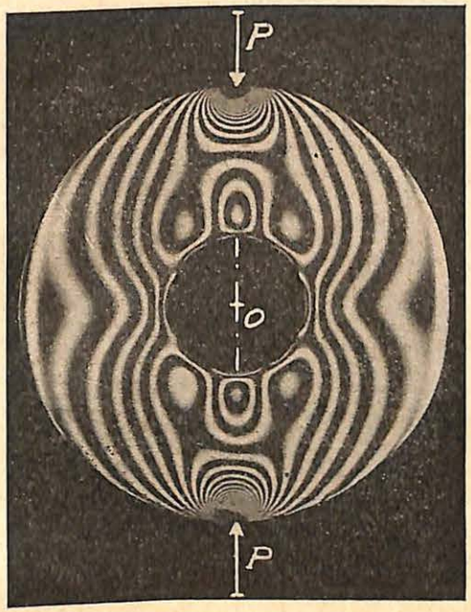



Photo P-30.

Lignes isochromatiques.

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}270.$$

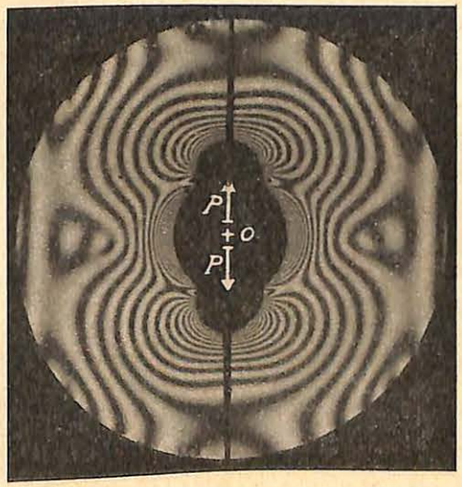



Photo P-31.

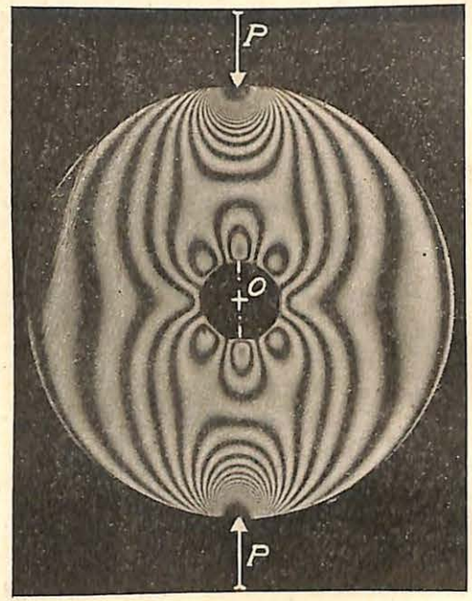
Lignes isochromatiques.

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}270.$$

Photo P-32.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}152.$



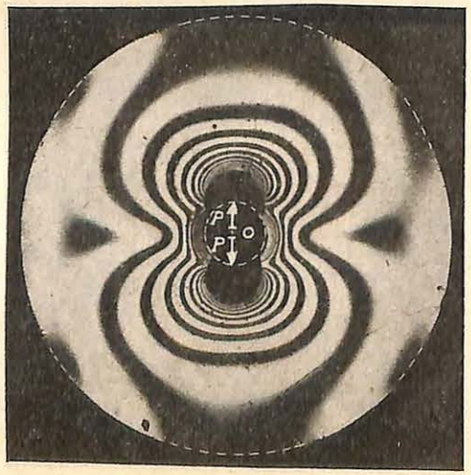




Photo P-33.

Lignes isochromatiques.

$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}152.$



## E. — OBTENTION EXPERIMENTALE DU DIAGRAMME DES TENSIONS NORMALES DANS LA SECTION TRANSVERSALE DE L'ANNEAU SITUEE SUIVANT LE DIAMETRE BB NORMAL A LA DIRECTION DES CHARGES EXTERIEURES

27. — La section transversale considérée est une section de symétrie, la trace de cette section est donc confondue avec la ligne isostatique transversale et avec une partie de l'isocline 0°.

On obtient de suite les tensions normales aux points intrados $B_i$ et extrados $B_e$ de cette section. On sait, en effet, qu'en ces points la tension principale radiale $\sigma_r$ est nulle, la matière se trouve donc en état simple de traction, caractérisé par la seule valeur de la tension circonférentielle $\sigma_1 = \sigma_a$. Cette tension est donc proportionnelle au numéro d'arrivée de la banque isochromatique qui passe en cet endroit.

Ainsi, pour la photographie P-23, on voit que, en valeur absolue :

$$\left| \frac{\sigma_{B_e}}{\sigma_{B_i}} \right| = \frac{11{,}2}{7{,}2} = 1{,}56$$

ce qui est confirmé très sensiblement par la photographie P-22.

A une certaine échelle, $\sigma_{B_e}$ et $\sigma_{B_i}$ peuvent donc être représentés respectivement par des nombres proportionnels à 11,2 et à 7,2.

On s'assure de suite que *ces deux valeurs ne sont pas compatibles avec un diagramme rectiligne* pour la tension $\sigma_1$ et que nécessairement *ce diagramme est nettement curviligne.*

En traçant le diagramme de variation du numéro d'arrivée des bandes d'extinction en fonction de leur abscisse le long de la section B, on a le diagramme de la différence $\sigma_r - \sigma_a$ des tensions principales.

Pour déterminer suffisamment le diagramme de $\sigma_1$, il faudrait connaître un troisième point. Le plus logiquement, c'est le point du diagramme situé à l'aplomb du point $B_0$ d'extinction permanente en photo-élasticité. Ce point apparaît très clairement sur les photographies. On sait qu'il correspond au fait que les deux tensions principales y sont égales et de même signe. Si l'on en connaissait la somme, leur valeur serait donc connue. Il existe des moyens de déterminer cette somme expérimentalement.

Mais pour les cas où la résistance des matériaux semble suffire ($\lambda = r_1/r_e \lesseqgtr 0{,}6$), le diagramme des tensions $\sigma_a$ répondra très sensi-

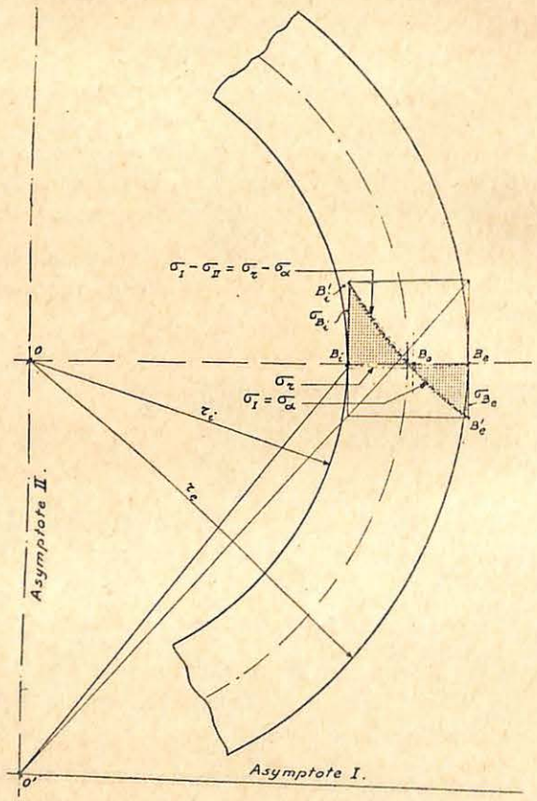



Fig. 32. — Diagramme de la tension circonférentielle dans la section BB (calcul graphique).



blement à la loi indiquée par cette théorie dans la section B. On a vu que cette loi est alors une hyperbole équilatère (§ 5, formule 6) :

$$\sigma_a = \frac{1}{1 + z'/\rho'} \left[ \frac{N}{\Omega} + \frac{M'.z'}{I'} \right] \qquad (6)$$

On peut calculer point par point au moyen de cette formule, le diagramme de $\sigma_a$ dans la section BB (fig. 32, relative à l'anneau de la photographie P-23).

Il est possible de faire le contrôle indirect suivant : Supposer que la loi est l'hyperbole équilatère en question et en rechercher les asymptotes. L'une d'entre elles est la droite qui passe au centre de courbure de l'anneau, l'autre se détermine graphiquement assez aisément, pusqu'on a deux points et une asymptote de cette hyperbole équilatère. Or, la théorie de la résistance des matériaux indique que cette seconde asymptote est distante de $M'.\rho'/I'$ du niveau représentant la trace de la section (fig. 5). Donc, $OO' = M'.\rho'/I'$.

Pour trouver expérimentalement ce diagramme, on peut procéder, à partir de la connaissance des isochromatiques, à une intégration le long de l'isostatique confondue avec la trace de la section BB ([8], chap. IX, p. 439). Le diagramme obtenu doit concorder très sensiblement avec l'hyperbole équilatère dont il est question ci-dessus.

28. — Tout ceci permet d'affirmer que lorsque $\lambda = r_1/r_e \lesseqgtr 0{,}6$, la formule (6) de la tension normale $\sigma_a$ des pièces courbes à forte courbure relative sollicitées par flexion plane se trouve parfaitement confirmée. L'auteur anglais Coker avait d'ailleurs déjà constaté le fait.

D'autre part, tout indique en conséquence que la photo-élasticité donne le diagramme des $\sigma_a$ également pour les cas où la formule de la résistance des matériaux n'est plus valable, mais doit être remplacée par les formules de la théorie de l'élasticité.

## F. — RESUME DES RESULTATS ACQUIS PAR LE CONTROLE DES ANNEAUX PAR LA PHOTO-ELASTICITE

29. — Nous avons réalisé toute une suite d'essais au banc photo-élastique sur une série complète d'anneaux dont les rapports caractéristiques $\lambda = r_i/r_e$ variaient de 0,845 à 0,152, comme l'indique le tableau ci-après résumant les résultats obtenus.

Pour l'observation des lignes isochromatiques ou bandes d'extinction, nous avons utilisé comme matière transparente le trolon et la dekorit (ce sont des résines artificielles). Le trolon et la dekorit ne diffèrent guère l'un de l'autre que par le recuit qu'ils ont subi. Observons cependant que la dekorit est plus déformable que le trolon.

Pour l'observation des isoclines, nous avons utilisé le plexiglas.

Les essais photo-élastiques ont été faits en lumière verte monochromatique polarisée circulairement, obtenue en éliminant par un filtre toutes les radiations autres que la raie verte 5.460,9 A°.

Les courbes isochromatiques ou bandes d'extinction s'étudient le mieux en lumière polarisée circulaire, ce qui évite l'apparition simultanée des isoclines, lesquelles gêneraient l'observation des isochromatiques.

Les plaques de trolon, de dekorit et de plexiglas dans lesquelles les anneaux ont été découpés avaient 5 mm. d'épaisseur.

30. — Les essais photo-élastiques donnent très remarquablement :

La position des points neutres à l'intrados et à l'extrados de l'anneau;

La position des autres points singuliers du réseau des lignes isostatiques;

La position des points d'inflexion, au moins pour les anneaux tels que :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} > 0{,}35,$$

Le diagramme des tensions circonférentielles à l'intrados et à l'extrados;



Le diagramme des tensions normales $\sigma_a$ dans toute l'étendue de la section B.

Dans le cas où la position des points d'inflexion est très nette, on sait (§ 9, 1°, fig. 14) que la sollicitation de l'anneau est immédiatement connue. En effet, le vecteur sollicitant la section transversale passant par le point d'inflexion s'appuie sur ce dernier et est dirigé parallèlement au diamètre de charge, il est donc immédiatement mis en place.

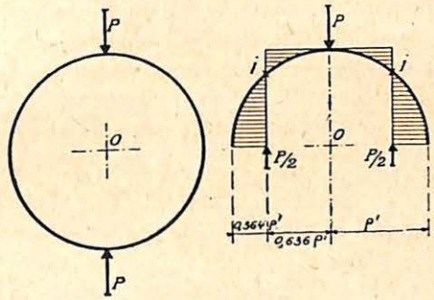



Fig. 33. — Sollicitation d'un demi-anneau.

La figure 33 montre ce résultat (*). L'orientation de ce vecteur est bien conforme à ce qu'indique la théorie de la région voisine du point d'inflexion : la droite qui joint les points neutres est, par rapport à la trace de la section, trois fois moins inclinée (et en sens inverse) que le vecteur sollicitant.

Ces essais montrent bien que *toutes les conséquences annoncées par la théorie ordinaire de la résistance des matériaux*, dans les limites de l'élasticité, *sont confirmées expérimentalement*, pour autant que le rapport $\lambda = r_i/r_e \leqq 0{,}6$ ou que le rapport $h/2\rho < 0{,}25$.

(*) Cette figure est extraite de : « Etude de la résistance des volants », par L. Baes et L. Blanjean. Revue « Standards », Bruxelles, n^os 6, 7 et 8 de 1958.

Ces limites couvrent *tous* les cas pratiques courants.

*La confiance dans les formules de la résistance des matériaux peut donc être complète pour ces cas.*

31. — Ces essais montrent également que, en dehors de ces limites de proportions, les formules de la théorie de l'élasticité sont confirmées, notamment pour ce qui concerne le diagramme des tensions circonférentielles à l'intrados et à l'extrados (fig. 31).

32. — Disposant donc d'un moyen expérimental très efficace, nous avons pensé utile de confronter le cas où l'anneau est sollicité par deux forces diamétrales de traction, appliquées à l'intrados, et celui où il est sollicité par deux forces diamétrales de compression appliquées à l'extrados. La théorie ordinaire de la résistance des matériaux ne fait pas de distinction entre les deux cas, sinon au point de vue des signes.

En revanche, la théorie de l'élasticité fait une distinction très nette entre les deux cas, tenant compte de l'endroit de la localisation des forces appliquées.

Nous donnons en annexe les formules, que nous avons établies, exprimant les tensions pour le cas des deux charges de compression; ces formules diffèrent des formules (31) à (36) indiquées précédemment pour le cas des deux charges de traction.

Puisque, pour les deux cas, les formules de tension sont différentes, les bandes d'extinction ont évidemment des formes différentes. Si les aspects de figures des bandes d'extinction diffèrent sensiblement, c'est que les deux cas sont nettement distincts.

De plus, la théorie de la résistance des matériaux localise les points d'inflexion sur les alignements parallèles au diamètre de charge, à une distance de 0,318. ($2\rho'$) de part et d'autre de ce diamètre (fig. 14).

Les photographies P-20 à P-33 montrent la situation des deux cas. Elles font apparaître que pour les cas où :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} = 0{,}501;\ 0{,}384;\ 0{,}270;\ 0{,}152.$$



il n'est plus possible de définir la position des points d'inflexion, et que d'ailleurs il y a une distinction très nette entre les deux problèmes de charges de traction et de charges de compression. Cette distinction concerne notamment la position des points neutres sur les contours et le groupement des bandes d'extinction dans la section B, sur le diamètre transversal aux charges. Or, la résistance des matériaux ne distingue pas les deux cas.

Le tableau suivant montre les résultats obtenus pour ces deux cas de sollicitation :

| $\lambda = \frac{r_i}{r_e}$ | Charge à l'extrados | | Charge à l'intrados | |
|---|---|---|---|---|
| | Photo n° | Excentricité en % de ($2\rho'$) | Photo n° | Excentricité en % de ($2\rho'$) |
| 0,845 | 20 | 31,5 | 21 | 31,8 |
| 0,724 | 22 | 31,9 | 23 | 32,0 |
| 0,636 | 24 | 31,8 | 25 | 33,3 |
| 0,501 | 26 | 33,4 | 27 | 33,2 |
| 0,384 | 28 | — | 29 | — |
| 0,270 | 30 | — | 31 | — |
| 0,152 | 32 | — | 33 | — |

*N. B.* — La résistance des matériaux donne une excentricité de 31,8 % . ($2\rho'$).

33. — Tout cela confirme donc très nettement que dès que les proportions de l'anneau sont telles que $\lambda = r_i/r_e < 0{,}6$, le calcul doit être fait par la théorie de l'élasticité, tandis que pour les anneaux moins épais, le calcul peut se fait par la résistance des matériaux.

*Conclusion importante.* — La photo-élasticité permet de déterminer aisément la limite d'application de formules basées sur des hypothèses simplificatrices, et empêche que l'on analyse d'une manière incorrecte les cas qui échappent à ces formules.

# III. - RELATION DES ESSAIS EFFECTUES SUR ANNEAUX EN FER OU EN ACIER

34. — En vue de vérifier expérimentalement, sur pièces réelles métalliques, l'exactitude des formules données ci-avant, nous avons effectué des essais sur un lot de 22 anneaux. Nous donnons, ci-joint, un tableau résumant les principaux résultats obtenus. Toutefois, certains de ces essais appellent quelques remarques. Les anneaux étaient sollicités par deux forces de traction radiales, égales et diamétralement opposées.

## 35. — CARACTERISTIQUES DES SERIES D'ANNEAUX ESSAYES.

1°) *Métaux utilisés.*

Les anneaux se partageaient en trois séries de dimensions identiques; nous avions en outre quatre anneaux hors série. Chacune des séries était faite d'un métal différent. Les métaux étaient désignés :

Acier D des unifiés français (trempé à l'eau à 875°, revenu à 625°);

Fer 5;

Fer S (fer de Suède).

Nous avons essayé des éprouvettes de traction de chacun de ces trois métaux. Les résultats obtenus sont les suivants :

| Métal. | Tension limite apparente d'élasticité $R_e$ en kg/mm² | | Tension de rupture $R_r$ en kg/mm² | Allongement de rupture pris sur 10 Φ, en % | Striction en % | Dureté Brinell |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Acier D (traité) . | 51,3 | 51,3 | 68,4 | 18,4 | 66,4 | 217 |
| | 51,3 | | 67,4 | 14,6 | 65,2 | 217 |
| Fer 5 . . . . | 24,8 | 25,9 | 37,6 | 28,5 | 58,4 | 99,2 |
| | 27,0 | | 35,4 | 24,1 | 46,7 | 101 |
| Fer S . . . | 17,95 | | 29,0 | 38,1 | 78,8 | 71,6 |

Les diagrammes de ces essais de traction sont reproduits par les figures 34 à 36.

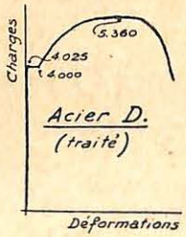



Fig. 34. — Diagramme de l'essai de traction de l'acier D.

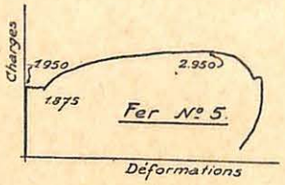



Fig. 35. — Diagramme de l'essai de traction du fer n° 5.



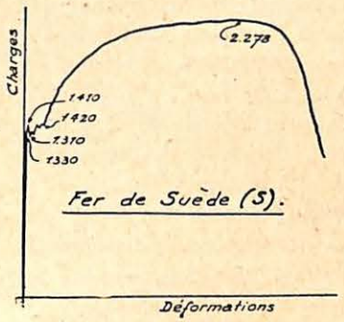



Fig. 36. — Diagramme de l'essai de traction du fer de Suède.

2°) *Tableau des résultats des essais sur anneaux.*

Le tableau ci-après donne pour chaque anneau les caractéristiques suivantes :

Dans la colonne n° :

1 : un numéro d'ordre de l'anneau;

2 : la désignation du métal dont est fait l'anneau;

3 : le diamètre $d = 2.a$ de la barre;

4 : le rayon $\rho$ du centre de gravité G de la section transversale;

5 : le rayon $\rho'$ du centre de gravité G' de la section transversale transformée;

6 : le rapport $\lambda = r_i/r_e$, caractéristique de la courbure relative;

7 : la tension normale $\sigma_{max}$ de flexion qui se produit dans l'anneau lorsque celui-ci est soumis à deux forces de traction F de 1.000 kgs chacune. Cette tension est celle qui se produit à l'extrados de la section A, c'est-à-dire de la section couchée suivant l'axe de la charge, quand $\lambda \geqq 0{,}6$, car pour $\lambda < 0{,}6$, la tension maximum se produit en B à l'intrados; cette tension répond à la formule :

$$\sigma_{max} = \frac{1}{1 + v'/\rho'} \cdot \frac{F}{\pi} \cdot \frac{\rho' . v'}{I'} \qquad (57)$$

ce qui devient pratiquement ici, en confondant $\rho'$ et $\rho$ :

$$(\sigma_{max})_{\text{en A}} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \rho/a} \cdot \frac{F}{2\,\Omega} \qquad (58)$$

$\Omega$ étant l'aire de la section transversale de la barre;

8 : la force $F_e$ qu'il faudrait appliquer à l'anneau pour que la tension maximum soit égale à la tension $R_e$, limite apparente d'élasticité, constatée par l'essai de traction simple du métal;

9 : la force $F_p$ pour laquelle on constate expérimentalement les premières déformations permanentes du diamètre BB, transversal à la charge;

10 : le rapport $F_p/F_e$ de la charge qui fait constater une déformation permanente du diamètre BB, à la charge pour laquelle la tension maximum à l'extrados des sections A atteint la limite apparente $R_e$;

11 : la flèche diamétrale $f_B$ calculée, variation du diamètre de l'anneau normal au diamètre suivant lequel sont placées les charges. Cette flèche est calculée par la formule 30 :

$$f_B = \frac{F}{E.I'} \cdot \rho'^3 \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{I'}{\Omega'} \cdot \frac{1}{\rho'^2} \left( 1 - \xi \cdot \frac{E}{G} \right) \right\} \qquad (30)$$

Les calculs ont été faits pour la simplicité avec $E = 20.000$ kg./mm².

12 : la flèche diamétrale $f_B$ réellement observée lors des essais.

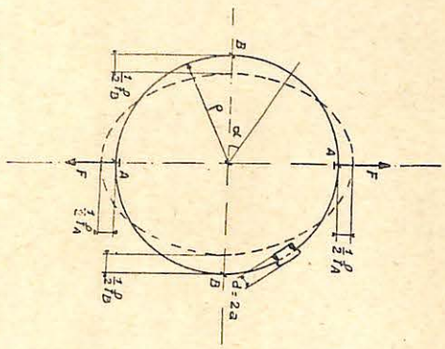



Fig. 37. — Flèches prises par l'anneau déformé.

*Résultats des essais effectués sur les anneaux (fig. 37).*

| 1. | 2. | 3 | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Pour F=1.000 kg. | Pour la limite élastique $\sigma$ max. = $R_e$ | | | Pour F = 100 kg. | |
| No | Métal. | $d = 2a$ mm. | $\rho$ mm. | $\rho'$ mm. | $\lambda = \frac{\tau_i}{\tau}$ | $\sigma$ max. kg./mm² | $F_e$ calculée kg. | $F_p$ réelle kg. | $\frac{F_p}{F_e}$ | $f$ calculée avec E = 20.000 kg/mm² mm | $f$ réelle mm |
| 1 | D | 25,0 | 50 | 49,206 | 0,600 | 8,549 | 6.005 | 7.000 | 1.165 | 0,004.4 | 0,004.3 |
| 4 | » | » | 75 | 74,475 | 0,714 | 13,712 | 3.745 | 3.750 | 1,000 | 0,014.5 | 0,012.6 |
| 7 | » | » | 100 | 99,608 | 0,778 | 18,882 | 2.760 | 3.750 | 1,360 | 0,033.6 | 0 031.7 |
| 10 | » | » | 125 | 124,684 | 0,818 | 24,056 | 2.140 | 2.500 | 1,168 | 0,065.1 | 0,063.1 |
| 13 | » | » | 150 | 149,738 | 0,847 | 29,231 | 1.757 | 2.200 | 1,346 | 0,112.3 | 0,104.6 |
| 16 | » | » | 175 | 174,776 | 0 867 | 34,542 | 1.486 | 2.000 | 1,346 | 0,177.7 | 0.168.0 |
| 19 | » | 20,5 | 60 | 59,573 | 0,719 | 19,806 | 2.592 | 3.000 | 1,178 | 0,016.9 | 0,015.5 |
| 20 | » | » | » | » | » | » | » | 3.400 | 1,336 | » | 0,015.0 |
| 2 | 5 | 25,0 | 50 | 49,206 | 0,600 | 8,549 | 3.030 | 3.750 | 1,237 | 0,004.4 | 0,004.1 |
| 5 | » | » | 75 | 74,475 | 0,714 | 13,712 | 1.890 | 2.400 | 1 270 | 0,014.5 | 0,013.7 |
| 8 | » | » | 100 | 99,608 | 0,778 | 18,882 | 1.372 | 1.500 | 1,092 | 0,033.6 | 0,032.1 |
| 11 | » | » | 125 | 124,684 | 0,818 | 24,056 | 1.077 | 1.400 | 1,300 | 0,065.1 | 0,063.1 |
| 14 | » | » | 150 | 149,738 | 0,847 | 29,231 | 887 | 1.100 | 1.242 | 0,112.3 | 0,104.8 |
| 17 | » | » | 175 | 174,776 | 0,867 | 34,542 | 750 | 900 | 1,200 | 0 177.7 | 0,163.0 |
| 21 | » | 20,5 | 60 | 59,573 | 0,719 | 19,806 | 1.308 | 1.500 | 1,148 | 0,016.9 | 0,015.8 |
| 22 | » | » | » | » | » | » | » | » | » | » | 0,015.7 |
| 3 | S | 25,0 | 50 | 49,206 | 0,600 | 8,549 | 2.100 | 2.250 | 1,072 | 0,004.4 | 0,004.8 |
| 6 | » | » | 75 | 74,475 | 0,714 | 13,712 | 1.308 | 1.500 | 1,148 | 0,014.5 | 0,014.6 |
| 9 | » | » | 100 | 99,608 | 0 778 | 18 882 | 950 | 950 | 1.000 | 0,033.6 | 0,037.8 |
| 12 | » | » | 125 | 124,684 | 0,818 | 24,056 | 746 | 950 | 1,274 | 0,065.1 | 0,068.9 |
| 15 | » | » | 150 | 149,738 | 0,847 | 29,231 | 614 | 750 | 1,222 | 0,112.3 | 0,110.5 |
| 18 | » | » | 175 | 174,776 | 0,867 | 34,542 | 520 | 700 | 1,346 | 0,177.7 | 0,185.0 |

*Remarque.* — Pour tous les cas soumis aux essais, $\rho'$ est pratiquement égal à $\rho$.

## DESCRIPTION DE L'ESSAI D'UN DES ANNEAUX.

36. — Le diagramme d'un des essais est reproduit ici à deux échelles différentes (fig. 38 et 39). Les mesures de déformation du diamètre sont faites au moyen d'un comparateur donnant le 1/100 de millimètre et permettant d'apprécier le 1/1.000 de millimètre.

Les mesures portent sur la flèche diamétrale $f$ de l'anneau (variation de longueur du diamètre horizontal perpendiculaire à la direction des forces appliquées). Les deux photographies P-34 et P-35 montrent le montage réalisé, soit avec le comparateur, soit avec l'extensomètre Huggenberger.

Constatons qu'une division de la montre, représentant 1/100 de millimètre, indique une flèche diamétrale relative de 1/10.000 si le diamètre initial est de 100 mm., et de 1/35.000 si le diamètre initial est de 350 mm. Or, on peut très bien apprécier le 1/5 de division, et même le 1/10.

La finesse du procédé de mesure est donc grande; d'ailleurs, la moindre fluctuation de l'effort est indiquée avec une plus grande netteté par ce montage que par les cadrans indicateurs de la machine d'Amsler employée aux essais.

Cette flèche diamétrale commence par être proportionnelle à la charge appliquée; on est manifestement dans la phase élastique. Si, dans cette phase, on redescend à une charge inférieure, on repasse par les mêmes points du diagramme de l'essai.

37. — A partir d'une certaine charge, on constate que les déformations croissent plus rapidement que les efforts appliqués; la limite de proportionnalité du métal est franchie dans une certaine zone de l'anneau. En revenant en arrière, par diminution de la charge, on ne repasse plus par les mêmes points du diagramme. Pour les anneaux essayés bruts de forge, des écailles d'oxyde commencent alors à se détacher de la surface de l'anneau. La charge F, pour laquelle la tension au point le plus sollicité de l'anneau atteint la limite apparente d'élasticité $R_e$ de la matière, est assurément comprise entre la charge à partir de laquelle le diagramme charge-flèche cesse d'être rectiligne et la charge à partir de laquelle on constate, à l'aide du montage réalisé, que la flèche diamétrale de l'anneau n'est plus totalement élastique et comporte donc une partie permanente.

La première de ces charges (limite de proportionnalité) est évidemment impossible à relever strictement; la dernière de ces charges se relève par tâtonnement.

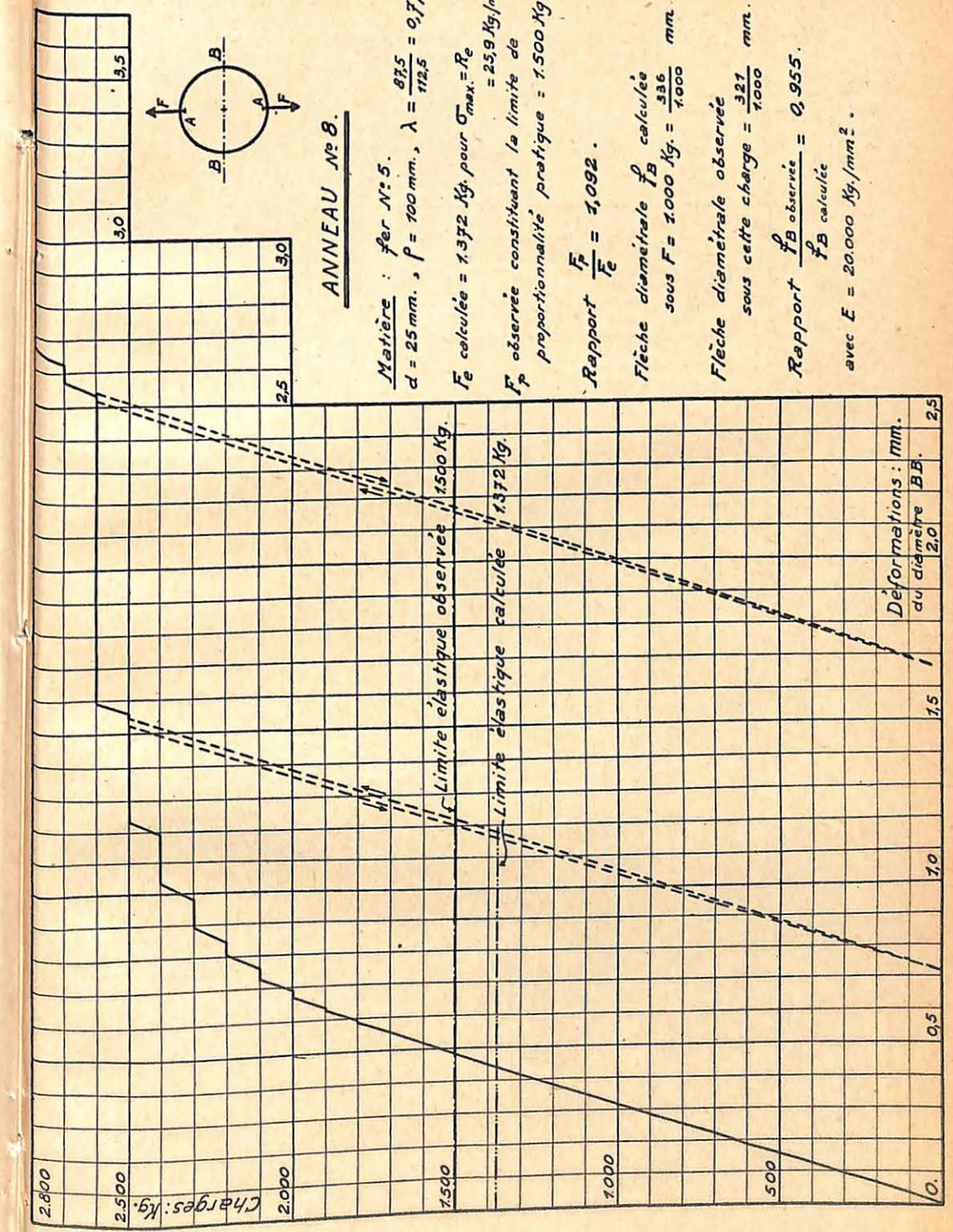



Fig. 38 — Diagramme de l'essai de traction de l'anneau n° 8 (reproduction à grande échelle du début du diagramme).

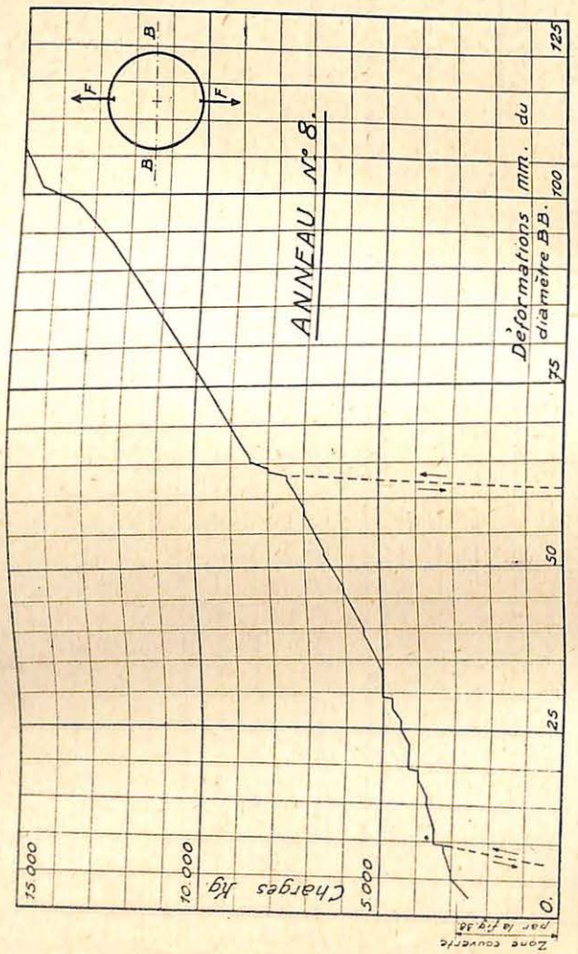



Fig. 39. — Diagramme de l'essai de traction de l'anneau n° 8

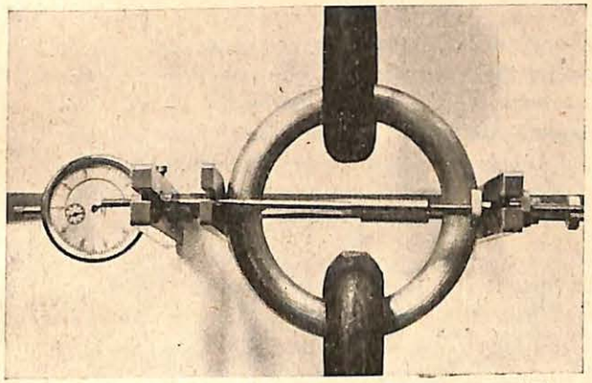


Photo P-34.
Montage
du comparateur.

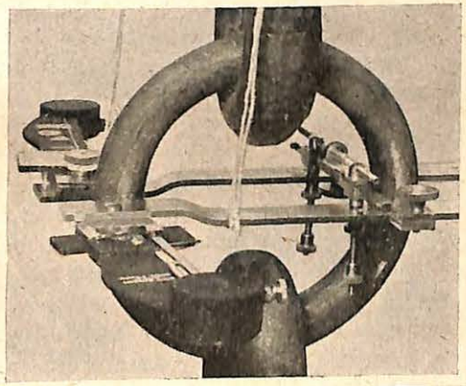


Photo P-35.
Montage
de l'extensomètre.

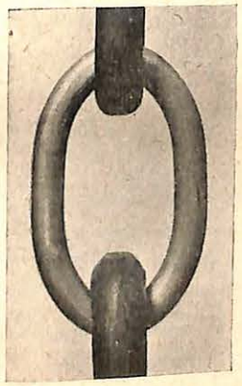


Photo P-36.
Anneau au cours
de la déformation.

Photo P-37.
Anneau fortement
déformé.

On ne peut évidemment pas s'attendre à ce qu'une déformation permanente du diamètre BB se constate dès que la tension au point le plus sollicité des sections A atteint la limite $R_e$; en effet, la déformation du diamètre BB est le résultat d'une intégration des déformations de tout l'anneau. Il est donc certain qu'une déformation permanente sensible ne se relève que lorsque la limite d'élasticité est franchie dans une région de l'anneau d'une étendue suffisante.

Le rapport $F_p/F_e$ *doit donc être supérieur à l'unité*; il faut que les essais constatent nettement ce fait. C'est bien ce que l'on relève au tableau précédent. Ce rapport peut être variable avec les proportions de l'anneau et la nature du métal.

L'essai de l'anneau étant poursuivi, on constate que si l'on applique une charge supérieure à la charge $F_p$ des premières déformations permanentes constatées de la flèche diamétrale, la déformation nouvelle ne se stabilise pas instantanément. Il faut laisser la charge constante pendant quelques temps, avant que la flèche diamétrale de l'anneau cesse de grandir sous cette charge. Le diagramme de l'essai marque donc un palier. Ce palier va croissant avec la charge et il en est de même de la durée de formation de ce palier. Cette durée a parfois atteint vingt minutes, sans que l'on puisse affirmer avoir au bout de ce temps réellement épuisé toute la déformation correspondant à cette charge. Dans certains cas, on a porté la durée de maintien d'une charge constante à plusieurs heures (ce que permettait la machine employée); ce n'est que pendant les premières parties de ce temps que l'on constatait un accroissement de la déformation.

*L'action du temps est donc déjà très nettement marquée pour ce genre d'essais dès qu'il est poussé au delà de la limite d'élasticité.*

Les diagrammes figures 38 et 39 obtenus par pointage montrent très bien le phénomène.

D'autre part, les diagrammes enregistrés par la machine d'Amsler font apparaître qu'à chaque nouvelle montée de la charge, la courbe monte d'abord presque verticalement pour rattraper une courbe en prolongement continu de la partie précédente arrêtée au moment où l'on a maintenu la charge constante. La reproduction à la figure 40 d'un diagramme d'essai de l'anneau 20 montre très bien ce phénomène.



Si, après être arrivé à une charge $F_1$, on laisse redescendre à une charge $F_2$, au lieu de maintenir $F_1$ constante, puis qu'on fasse remonter la charge à la valeur $F_1$, les courbes de descente et de montée ainsi parcourues sont sensiblement parallèles à la première courbe de montée du début de l'essai.

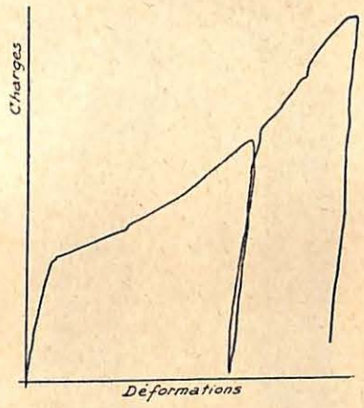



Fig. 40. — Reproduction du diagramme d'essai de l'anneau n° 20.

38. — Au fur et à mesure que grandit, au delà de la limite d'élasticité, la force à laquelle l'anneau est soumis, il se défigure de plus en plus et acquiert une forme tout à fait allongée, comme le montrent les photographies P-36 et P-37. On sait que le moment fléchissant agissant sur la partie de l'anneau proche du diamètre transversal aux charges est négatif, c'est-à-dire qu'il tend à diminuer la courbure de l'anneau. Elle décroît donc jusqu'à devenir nulle, mais il est évident que lorsque ce stade est atteint, le moment fléchissant existe toujours et poursuit son action dans le même sens. La conséquence en est que cette partie de l'anneau se courbe en sens inverse du sens primitif. L'anneau acquiert une forme de 8 aux très fortes charges; cela apparaît nettement sur la photo P-37. En poursuivant encore l'accroissement de la charge, l'anneau finit par se rompre (photographies P-38 et P-39).

*Cette charge de rupture est considérable par rapport à la charge limite apparente d'élasticité.* Par exemple, l'anneau 21, dont la

limite apparente d'élasticité était de 1.500 kg., ne s'est rompu qu'à 19.400 kg., c'est-à-dire à une charge égale à 12,94 fois la force donnant lieu au phénomène de la limite apparente d'élasticité; et encore, cet anneau s'est-il rompu dans une soudure en sifflet, car

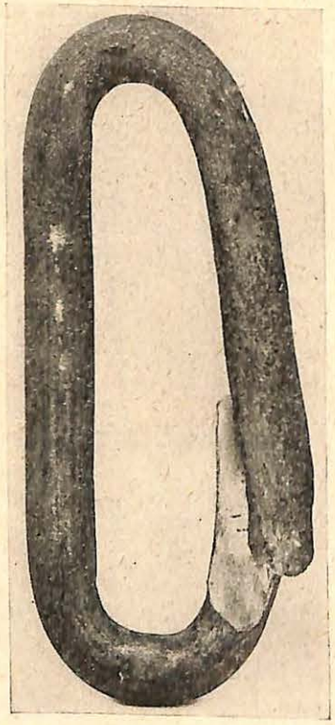


Photo P-38.
Anneau n° 21, après rupture (fer de Suède).
L'anneau est rompu dans une soudure en sifflet.

il était formé d'une barre droite pliée à chaud et soudée (photo P-38). La pièce commençait à s'écailler manifestement à 2.900 kg., la rupture a donc eu lieu quand on a appliqué à l'anneau une force 6,70 fois plus grande que celle qui fait apparaître les écailles et à laquelle, d'ailleurs, les déformations commencent à être nettement visibles à simple vue d'ensemble ($f_B$ = 1,78 mm. pour l'anneau 21).



L'anneau circulaire présente donc une grande sécurité contre la rupture. Quand les déformations commencent à être nettement remarquées à simple vue, on dispose encore d'une grande marge avant la destruction.

Photo P-39.
Anneau n° 20, après rupture (acier D, traité).
L'anneau est rompu hors de la zone de contact de la charge.
(Les fissures sont renforcées par les photographies.)

# IV. - RESUME ET CONCLUSIONS PRATIQUES

## A. — FORMULES

39. — Ce qui précède donne les formules des anneaux circulaires établies par deux méthodes différentes.

*Première méthode, par la théorie de l'élasticité*, qui ne fait aucune hypothèse simplificatrice.

Pour cette méthode, nous nous sommes contenté d'indiquer l'allure générale, sans entrer dans le détail algébrique, mais nous nous sommes surtout attaché à faire apparaître les relations directement utiles au point de vue pratique.

Ces relations, pour le cas de deux forces égales et diamétralement opposées, s'appliquant à l'intrados et sollicitant donc l'anneau en traction générale, sont :

Tension circonférentielle en A, à l'extrados :

$$(\sigma^A)_{\text{extrados}} = \frac{F}{r_1 . e} \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1-\lambda^2)(1-\lambda^{2n})\lambda^n}{(1-\lambda^{2n})^2 - n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2} \right\} \tag{33}$$

Tension circonférentielle en A, à l'intrados :

$$(\sigma^B)_{\text{intrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2(1-\lambda^{2n})^2}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2}-1\right)\right\} \tag{34}$$

Tension circonférentielle en B, à l'extrados :

$$(\sigma^B)_{\text{extrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(n/2)-1}\frac{n(1-\lambda^2)(1-\lambda^{2n})\lambda^n}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2}\right\} \tag{35}$$

Tension circonférentielle en B, à l'intrados :

$$(\sigma^A)_{\text{intrados}} = \frac{F}{r_i.e}\left\{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(n/2)-1}\left(\frac{2(1-\lambda^{2n})^2}{(1-\lambda^{2n})^2-n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2}-1\right)\right\} \tag{36}$$

Dans ces formules, $n$ est un nombre pair positif et $\lambda = r_i/r_e$.

On a vu que lorsqu'il est nécessaire de recourir à la théorie de l'élasticité, les formules pratiques ne sont pas les mêmes pour le cas où l'anneau est sollicité en traction générale et celui où l'anneau est sollicité en compression générale (par deux forces diamétralement opposées agissant respectivement à l'intrados et à l'extrados). Dans ce second cas, dont les circonstances d'application sont très différentes de celles du premier cas, les formules à appliquer sont données à l'annexe I.



Pour l'application des formules (33) à (36), au calcul de très gros anneaux, seuls cas pour lesquels la théorie de l'élasticité s'impose, on peut se limiter, dans les séries, aux termes pour lesquels $n = 2, 4, 6, 8$, au lieu de devoir poursuivre jusqu'à de grandes valeurs de $n$.

Dans ces conditions, l'application numérique de ces formules n'est pas ardue; un exemple a été traité au § 16.

*Deuxième méthode, par la résistance des matériaux.*

Ici, le calcul se fait en utilisant les formules de la flexion d'une pièce longue courbe; on néglige les déformations des sections transversales et on suppose que celles-ci restent planes après, comme avant déformation. Alors que les formules obtenues par la théorie de l'élasticité sont valables pour tous les anneaux, même exceptionnellement gros, les formules obtenues par la résistance des matériaux ne sont pas valables pour les très gros anneaux.

Ces formules étant applicables pour autant que le rapport $\lambda \leqq 0{,}60$, elles le sont pour tous les cas de la technique courante. Les essais tant mécaniques que photo-élastiques ont montré que ces formules étaient fort exactes pour tous les cas courants.

En fait, seuls les anneaux exceptionnellement épais exigent l'emploi des formules de la théorie de l'élasticité. D'ailleurs, pour un anneau déterminé, les formules de la résistance des matériaux conduisent à admettre une force portante plus faible que les formules de la théorie de l'élasticité. Au point de vue de la sécurité, il n'y a donc pas de danger à appliquer les formules de la résistance des matériaux.

La méthode par la résistance des matériaux se réduit au point de vue pratique à la formule générale (26), dans laquelle on se rappellera que $z'$ est compté positif vers l'extrados et négatif vers l'intrados.

Cette méthode ne distingue pas, sinon par les signes, le cas de l'anneau soumis à une traction générale de celui de l'anneau soumis à une compression générale.

Pour l'un et l'autre cas :

$\alpha$) *pour les anneaux habituels*, c'est-à-dire tels que $\lambda = r_i/r_e \leqq 0{,}60$, la tension circonférentielle maximum se produit en A, à l'extrados des sections où s'appliquent les charges; on désigne ci-après par $v'$ la valeur absolue du $z'$ en ce point;

$\beta$) *pour les anneaux épais*, c'est-à-dire tels que $\lambda = r_i/r_e \leqq 0{,}60$, la tension circonférentielle maximum se produit en B, à l'intrados des sections transversales au diamètre de charge; ci-après on désigne par $v''$ la valeur absolue du $z'$ en ce point.

Dans le cas $\alpha$, $\lambda \leqq 0{,}60$, la formule à appliquer est donc :

$$(\sigma^A)_{\text{extrados}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + v'/\rho'} \cdot \frac{F}{l'/v'.\rho'} \qquad (60)$$

Dans le cas $\beta$, $\lambda \leqq 0{,}60$, la formule à appliquer est donc :

$$(\sigma^B)_{\text{intrados}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - v''/\rho'} \cdot \frac{F}{l'/v''.\rho'}$$

$$\times \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\pi} - 1 + \frac{l'}{v''.\rho'} \cdot \frac{1}{\Omega} \right] \qquad (61)$$

Ces formules ne présentent aucune difficulté d'application pour le calcul d'un anneau circulaire déterminé. Nous reproduisons deux graphiques qui en facilitent beaucoup l'emploi et qui, en outre, permettent l'établissement d'un anneau devant répondre à une sollicitation connue (fig. 41 et 42).

La figure 41 est établie sous forme relative et la courbe qui y est tracée est donc valable pour tous les anneaux. La première partie JJ' de cette courbe se rapporte aux anneaux relativement minces, c'est-à-dire aux cas de la technique courante, pour lesquels $\lambda \leqq 0{,}60$; la



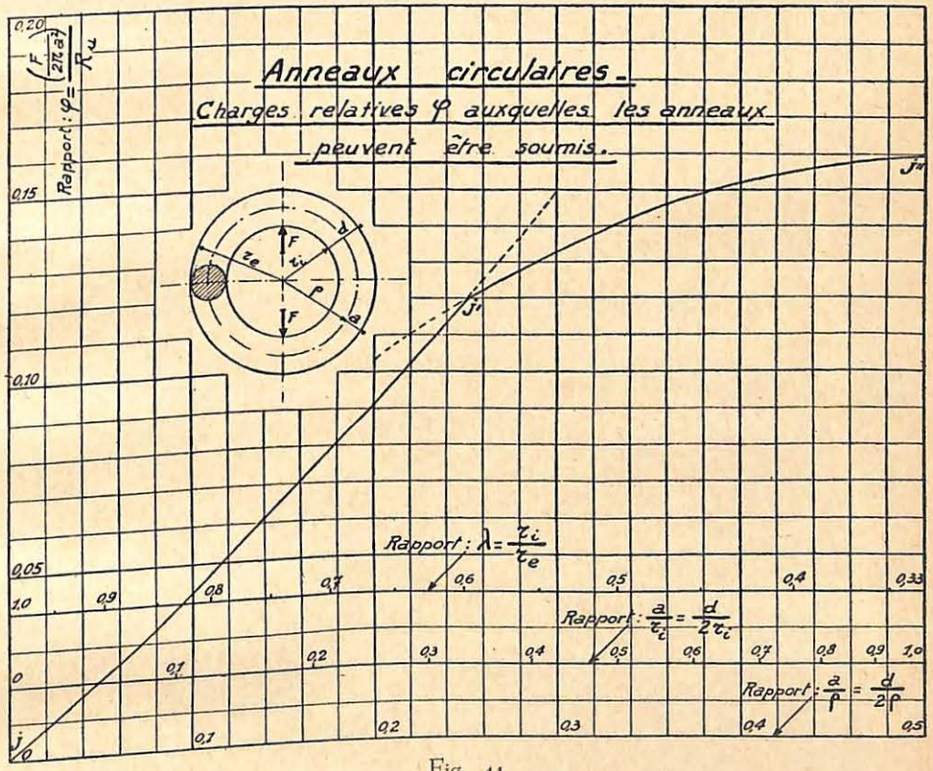



Fig. 41.

deuxième partie J'J'' concerne les anneaux relativement épais pour lesquels $\lambda \leqq 0{,}60$.

Cette courbe donne le rapport $\varphi = \dfrac{(F/2\pi a^2)}{R_u}$ en fonction du rapport $a/\rho$, ou de $d/2\rho$, ou de $d/2\,r_i$, ou de $\lambda = r_i/r_e$; $R_u$ désigne la tension d'utilisation admissible.

La figure 42 présente une série de courbes couvrant tous les cas pratiquement rencontrés. Chaque courbe se rapporte à un diamètre intérieur déterminé et elle permet de trouver le quotient $F/R_u$ en fonction du diamètre du fer de l'anneau. Inversement, ayant à faire supporter une charge connue, on obtient immédiatement les dimensions qu'il est possible de donner à l'anneau. Chaque courbe se compose de deux parties correspondant respectivement aux deux parties JJ' et J'J'' de la courbe de la figure 41. L'échelle des ordonnées est proportionnelle à la racine carrée des nombres représentés.

Occupons-nous spécialement du cas $\alpha$ ($\lambda \leqq 0{,}60$), qui comprend presque tous les anneaux utilisés dans la pratique.

Dans ces conditions, la plus grande différence entre $\rho$ et $\rho'$ étant à peine égale à 1,6 % de $\rho$, on peut, sans erreur sensible, supposer $\rho' = \rho$ et $v' = a$.

La formule (60) peut s'écrire alors :

$$(\sigma^A)_{\text{extrados}} = 1{,}62 \cdot \frac{(2\,r_i/d + 1)^2}{(2\,r_i/d + 2)} \cdot \frac{F}{d^2}$$

On remarque, en outre, qu'à une erreur maximum de 6,67 % près, dans le sens de la sécurité, on peut, si $\lambda \leqq 0{,}60$, simplifier et écrire :

$$(\sigma^A)_{\text{extrados}} = 1{,}62 \cdot \frac{2\,r_i}{d} \cdot \frac{F}{d^2} \qquad (62)$$

Donc, en remplaçant $(\sigma^A)_{\text{extrados}}$ par $R_u$, tension d'utilisation admise, de cette dernière relation on tire la formule pratique :

$$d = \sqrt[3]{\frac{1{,}62}{R_u} \cdot F \cdot (2\,r_i)} \qquad (63)$$



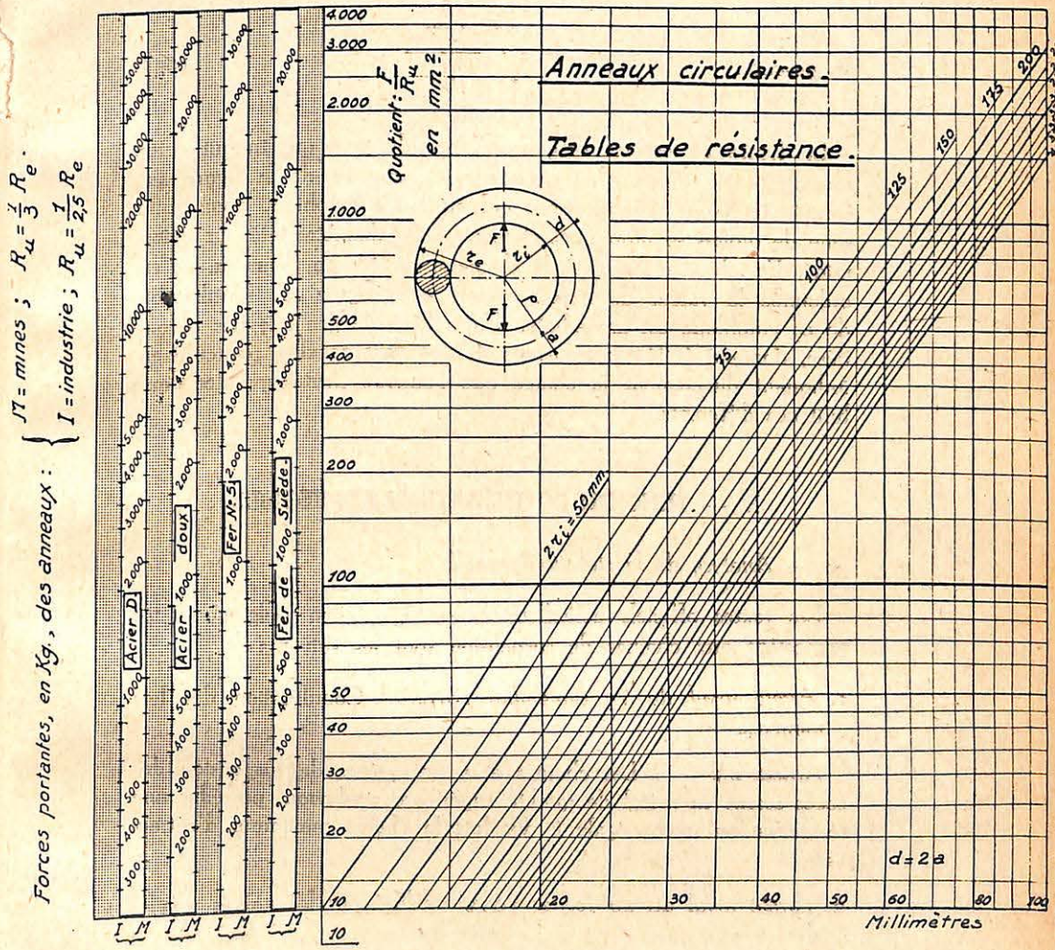



Fig. 43. Cas où $\lambda = \dfrac{r_i}{r_e} \leqq 0{,}60$.)

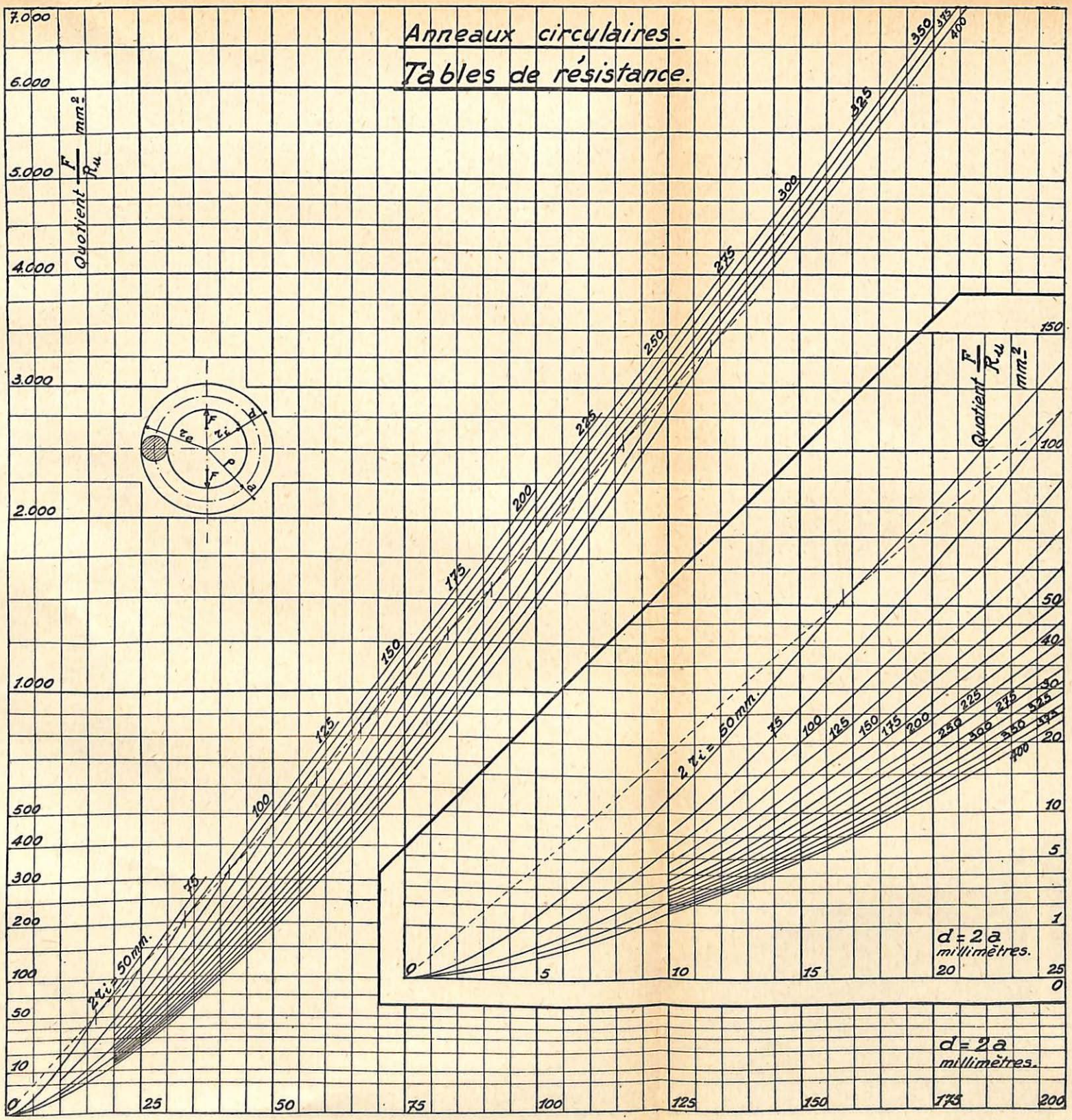

Anneaux circulaires.
Tables de résistance.
Quotient $\frac{F}{R_u}$ mm²
7.000
6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
500
400
300
200
100
50
10
0
25
50
75
100
125
150
175
200
2 r_i = 50 mm.
75
100
125
150
175
200
225
250
275
300
325
350
375
400
d = 2 a
millimètres.
Quotient $\frac{F}{R_u}$ mm²
150
100
50
40
30
20
10
5
1
0
5
10
15
20
25
2 r_i = 50 mm.
75
100
125
150
175
200
225
250
275
300
325
350
375
400
d = 2 a
millimètres.

Fig. 42.

ou encore :

$$d = K_u \sqrt[3]{F \cdot (2 r_i)} \qquad (64)$$

en posant .

$$K_u = \sqrt[3]{\frac{1,62}{R_u}} \qquad (65)$$

La figure 43 est un diagramme logarithmique qui traduit cette formule; cette figure n'est qu'une transformation de la figure 42, compte tenu des simplifications indiquées. Ce graphique donne une série de droites se rapportant chacune à un diamètre intérieur déterminé. En abscisse est coté le diamètre du fer de l'anneau, et en ordonnée la valeur de $F/R_u$, comme à la figure 42. L'utilisation de ce graphique est immédiate. Outre l'échelle générale des ordonnées, donnant $F/R_u$, nous avons dessiné huit échelles particulières, indiquant directement la charge que l'anneau peut supporter dans huit cas différents.

## B. — TENSION D'UTILISATION ADMISSIBLE

40. — *Analyse de la situation actuelle.*

Les textes officiels actuellement en vigueur en Belgique et se rapportant aux chaînes de suspension sont les suivants :

1. *Arrêté royal du 15 septembre 1919.* — Coordination des lois minières.

*Article 23.* — « Les chaînes et autres pièces de suspension des cages seront en métal de qualité supérieure et devront posséder une résistance au moins égale à dix fois la charge maximum d'extraction. »

2. *Arrêté royal du 20 février 1933*, modifié par les arrêtés royaux des *11 septembre 1933* et *12 mai 1938*.

Cet arrêté royal portant réglementation des appareils de levage et chemins de fer aériens en usage dans les entreprises industrielles et commerciales autres que les travaux souterrains des mines, minières et carrières ne fait pas mention des coefficients de sécurité à admettre dans la construction de ces appareils.



3. *Arrêté royal du 11 juillet 1936.* — Essais et vérification des appareils de levage et engins fixes à bord des navires.

*Article 1er.* — Avant mise en service :

« Les appareils de levage, apparaux des navires et les engins fixes de bord considérés comme leurs accessoires, y compris les mâts de charge, les pivots, les taquets, les œillets ou autres accessoires, doivent, avant leur mise en service, être éprouvés avec une charge d'essai telle qu'elle est fixée ci-après :

| Charge de sécurité : | Charge d'essai : |
|---|---|
| Jusque 20 tonnes . . . | 25 % en plus. |
| De 20 à 50 tonnes . . | 5 tonnes en plus. |
| Plus de 50 tonnes . . | 10 % en plus. » |

*Article 3.* — Essai préalable des engins mobiles :

« Aucune chaîne, anneau, crochet, manille, émerillon ou poulie ne peut être utilisée pour soulever ou descendre des charges avant d'avoir été essayé et vérifié avec une charge d'essai telle qu'elle est définie ci-après :

| Engin : | Charge d'essai : |
|---|---|
| Chaîne . . . . . <br> Manille . . . . . <br> Anneau . . . . . <br> Crochet . . . . . <br> Emerillon . . . . . | 100 % en plus de la charge de sécurité. |
| Poulie à un réa . . . . . | 300 % en plus de la charge de sécurité. |
| Chaînes calibrées utilisées avec des poulies mues à la main, ainsi que les anneaux, crochets, manilles ou émerillons y attachés d'une manière permanente . . | 50 % en plus de la charge de sécurité. |
| Poulies mues à la main et employées avec des chaînes calibrées et anneaux, crochets, manilles ou émerillons y attachés d'une manière permanente . . | 50 % en plus de la charge de sécurité. |

» Après avoir été essayés conformément aux prescriptions ci-dessus, tous engins de levage avec les engins accessoires et tous les engins mobiles seront inspectés, les réas et les axes des poulies étant démontés afin de vérifier si aucune pièce n'a été abîmée ou n'a subi de déformation permanente. »

*Article 11.* — Coefficient de sécurité :

« Il est recommandé d'utiliser au moins les coefficients de sécurité déterminés ci-après dans la construction des engins de levage :

| | |
|---|---|
| Pour toute partie métallique d'un engin de levage : | |
| Quand la charge de sécurité est de dix tonnes ou moins . | 5 |
| Quand la charge est de plus de dix tonnes . . . . . | 4 |
| Pour toute partie en bois (bois sain) . . . . . | 8 |
| Pour les chaînes . . . . . | 4,5 |
| Pour les câbles métalliques . . . . . | 5 |
| Pour les câbles en fibre végétale . . . . . | 7 » |

Ces textes ne précisent pas quelle est la tension d'utilisation à introduire dans les formules de calcul des anneaux.

*Pour les mines,* on se borne à dire que la charge de rupture d'un anneau doit être au moins dix fois supérieure à la charge maximum d'utilisation. Les essais que nous avons décrits dans ce mémoire montrent que, même si l'anneau est soudé et que la soudure est relativement défectueuse, la charge de rupture est toujours plus de cinq fois supérieure à la charge qui produit les premières déformations permanentes, à condition que le métal soit resté ductile et n'ait donc pas été écroui en service prolongé. Les essais montrent, en outre, que cette dernière charge est au moins égale à celle calculée par les formules (57) ou (63) dans lesquelles on introduirait à la place de $\sigma$ ou $R_u$ la valeur de $R_e$, limite apparente d'élasticité de la matière de l'anneau essayée en traction simple.

Il en résulte que la prescription en vigueur pour les mines serait satisfaite si l'on prenait la charge d'utilisation calculée par la formule (60) ou la formule simplifiée (63), formules dans lesquelles on prendrait pour tension d'utilisation $R_u$ au plus la moitié de la tension $R_e$, limite apparente d'élasticité de la matière.

*Pour les anneaux des engins mobiles des navires,* on se borne à une charge d'essai de 100 % supérieure à la charge d'utilisation prévue. On exige qu'après cet essai, il n'y ait aucune trace de



déformation permanente. On ne précise pas comment ni surtout avec quelle précision ce fait sera constaté. Toutefois, en principe, cela indique que le calcul ne peut pas se faire avec une tension d'utilisation $R_u$ supérieure à la moitié de $R_e$.

*Pour les éléments des engins fixes des navires,* on prescrit une charge d'essai de 25 % supérieure à la charge d'utilisation si celle-ci est au plus égale à 20 tonnes; on exige une charge d'essai de 10 % supérieure à la charge d'utilisation si celle-ci est au moins égale à 50 tonnes; enfin, pour une charge comprise entre 20 et 50 tonnes, on impose une charge d'essai égale à la charge d'utilisation augmentée de 50 tonnes.

De tels essais ne peuvent avoir aucune signification réelle; en effet, les deux seules choses que l'on puisse constater au cours d'un tel essai sont, ou la rupture, ou l'apparition de déformations permanentes.

D'après les essais décrits dans le présent mémoire, un essai d'anneau de 50 tonnes, par exemple, éprouvé à une charge d'essai de $1{,}10 \times 50 = 55$ tonnes, et qui n'aurait pas montré de déformation permanente, ni de rupture, aurait cependant pu faire dépasser en traction la limite d'élasticité de la matière à l'endroit le plus sollicité. Il en résulterait que la charge d'utilisation, appliquée statiquement, pourrait pratiquement atteindre la charge limite d'élasticité, ce qui est évidemment inadmissible.

Il en serait presque de même pour l'anneau de moins de 20 tonnes essayé à 125 % de la charge d'utilisation.

## C. — SOLUTION A ADOPTER

41. — *Bases logiques de cette solution.*

1. Existence d'une formule très simple .

$$d = K_u \cdot \sqrt[3]{F.(2r_1)} \qquad (64)$$

en posant :

$$K_u = \sqrt[3]{\frac{1{,}62}{R_u}} \qquad (65)$$

traduite en graphique très simple (fig. 43), valable dans les limites de l'élasticité et conclue de raisonnements classiques de la résistance

des matériaux. Elle est remarquablement confirmée par des essais précis, tant mécaniques que photo-élastiques.

2. Absence d'une formule permettant d'estimer correctement la charge de rupture. On a toutefois la certitude expérimentale que la charge de rupture statique est au moins cinq fois supérieure à celle que donnerait la formule complète (57), dans laquelle la tension est remplacée par $R_e$, limite apparente d'élasticité de la matière en traction simple statique.

3. Nécessité, étant donné que la charge peut être appliquée brusquement sur l'anneau, de n'adopter comme charge d'utilisation statique prévue, que moins de la moitié de celle qui ferait atteindre à la tension maximum en traction, la limite apparente d'élasticité $R_e$.

4. Nécessité, pour tout engin sollicité par des charges fréquemment répétées (souvent appliquées brusquement), de n'adopter comme charge d'utilisation statique qu'une charge qui ne ferait pas dépasser à la tension maximum, en traction, la moitié de la limite d'endurance du métal, c'est-à-dire environ le tiers de $R_e$.

## D. — CONCLUSION

42. — Les anneaux circulaires de section transversale circulaire sont à calculer au moyen des formules :

$$d = K_u \sqrt[3]{F.(2\,r_i)} \qquad \text{ou} \qquad F = \frac{d^3}{(2\,r_i).K_u^3}$$

en posant :

$$K_u = \sqrt[3]{\frac{1,62}{R_u}}$$

ou du graphique figure 43.

La tension d'utilisation à adopter est :

pour les appareils miniers :

$$R_u = \frac{R_e}{5}$$



pour les appareils industriels et de marine :

$$R_u = \frac{R_e}{2,5}$$

Les essais avant mise en service doivent toujours être effectués au moyen d'une charge statique de 100 % supérieure à la charge d'utilisation. Après un tel essai, aucune déformation permanente ne peut être constatée à l'aide d'appareils de mesure donnant le 1/100 de millimètre.

*Remarque.* — D'après les essais, la charge d'utilisation statique calculée de cette manière est en sécurité sur la charge de rupture statique, d'au moins 10 pour les appareils miniers et d'au moins 8 pour les autres.

*Tableau des valeurs caractéristiques utiles des principaux métaux employés pour les anneaux :*

| Matière | Tension de rupture $R_r$ kg/mm² | Tension limite apparente d'élasticité $R_e$ kg/mm² | Tension admissible $R_u$ | | Valeur de $K_u$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Mines $R_u = (1/3)\,R_e$ kg/mm² | Industrie $R_u = (1/2,5)\,R_e$ kg/mm² | Mines $\sqrt[3]{\frac{mm^2}{kg}}$ | Industrie $\sqrt[3]{\frac{mm^2}{kg}}$ |
| Fer de Suède . | 33,0 | 22,0 | 7,3 | 8,8 | 0,605 | 0,570 |
| Fer n° 5 . . . | 36,0 | 25,9 | 8,6 | 10,4 | 0,574 | 0,538 |
| Acier doux . . | 44,0 | 28,0 | 9,3 | 11,2 | 0,559 | 0,525 |
| Acier D traité. | 67,9 | 51,3 | 17,1 | 20,5 | 0,456 | 0,429 |

On pourrait s'étonner que, dans ces conclusions, il n'est pas fait allusion aux tensions élevées se produisant dans la zone du contact localisé de deux anneaux. Le calcul de ces tensions, dans les limites de l'élasticité, doit se faire comme il a été montré aux §§ 17 à 19.

On a vu que l'on doit considérer comme impossible d'éviter que la limite d'élasticité ne soit franchie dans la zone du contact localisé. Donc, dans cette zone, le métal est en déformation plastique et la région de contact s'étale sous la charge. Une telle situation n'est acceptable que pour une matière ductile; elle serait désastreuse pour une matière raide ou devenue telle. Dans cette région, la matière en

Le traitement subi par l'acier D est le suivant : trempé à l'eau à 875°, ensuite revenu à 625°.

Il est à remarquer que l'« Association des Industriels de Belgique » utilise depuis longtemps les valeurs suivantes de $K_u$ :

| Matière. | Mines. | Industrie. |
|---|---|---|
| Fer de Suède . . | 0,580 | 0,550 |
| Fer n° 5 . . . | 0,550 | 0,440 si $(2r_1) < 200$ mm.<br>0,550 si $(2r_1) \geqq 200$ mm. |

La charge qu'il est possible d'appliquer à un anneau donné ne sera pas fort différente, pour la plupart des cas, qu'elle soit calculée avec ces anciennes valeurs de $K_u$ ou avec les nouvelles.

---

plasticité trouve sous elle une matière qui l'étreint. Il n'en est pas ainsi dans une zone sollicitée par traction.

Dans les anneaux en service industriel, on se trouve toujours dans le cas où $\lambda \leqq 0{,}60$, et l'anneau est sollicité par traction générale; la région de plasticité par contact est donc toujours à l'intrados, tandis que la tension maximum de traction se produit toujours à l'extrados.

L'expérience semble montrer qu'il n'y a pas de rupture d'anneaux industriels, sans défauts, se produisant autrement qu'elle ne se produit en laboratoire, c'est-à-dire que la rupture n'est pas provoquée par l'effet des tensions élevées de la zone du contact.

Cette conclusion semble même pouvoir s'appliquer au cas des anneaux écrouis, dont la rupture débute aussi ailleurs que dans la zone du contact. Toutefois, il est indispensable, étant donnée l'importance des anneaux dans le dispositif mécanique auquel ils appartiennent, d'exiger que la matière de ces pièces garde toutes ses qualités de ductilité et ne soit pas écrouie par l'usage, à la suite d'actions excessives assez fréquemment répétées.

On sait, en effet, que les matières dont sont faits les anneaux peuvent, à la longue, s'écrouir gravement et prendre le caractère des matières absolument raides, *auquel cas des ruptures sous charge réduite, et quasi sans déformations, sont à redouter.*

*Il est donc indispensable de maintenir formellement la pratique d'imposer un recuit périodique des anneaux.*

Cette question de l'écrouissage des anneaux sera reprise dans une note ultérieure; elle revêt une importance primordiale, et les conclusions du présent mémoire ne sont applicables que si les anneaux ne sont pas écrouis.

Il est possible que s'impose ultérieurement, à cet égard, un contrôle par radiographie.



# ANNEXE I

*Formules des anneaux circulaires de section transversale rectangulaire, sollicités par deux forces diamétralement opposées, appliquées soit à l'intrados, soit à l'extrados, supposées d'une part uniformément réparties sur un certain arc et, d'autre part, concentrées, par la théorie de l'élasticité.*

43. — Nous traitons ces problèmes par la théorie de l'élasticité. Les formules données précédemment d'après la théorie de l'élasticité ne concernaient que le cas de deux forces opposées, concentrées et appliquées à l'intrados, c'est-à-dire sollicitant l'anneau par une traction d'ensemble.

Les expressions générales valables quelle que soit la distribution des forces extérieures, en distribution symétrique cependant, sont :

$$\sigma_r = \frac{A_0}{r^2} + 2C_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [-n(n-1)r^{n-2}A_n - (n+1)(n-2)r^n B_n$$
$$-n(n+1)r^{-n-2}C_n - (n-1)(n+2)r^{-n}D_n] \cos n\alpha \qquad (66)$$

$$\sigma_a = -\frac{A_0}{r^2} + 2C_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)r^{n-2}A_n + (n+1)(n+2)r^n B_n$$
$$+n(n+1)r^{-n-2}C_n + (n-1)(n-2)r^{-n}D_n] \cos n\alpha \qquad (67)$$

$$\tau_{ra} = \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)r^{n-2}A_n + n(n+1)r^n B_n$$
$$-n(n+1)r^{-n-2}C_n - n(n-1)r^{-n}D_n] \sin n\alpha \qquad (68)$$

Seules les valeurs paires de $n$ sont à prendre en considération.

Les valeurs des constantes $A_n$, $B_n$, $C_n$ et $D_n$ diffèrent suivant le genre de sollicitation extérieure en jeu.

Dans l'expression de ces constantes intervient le groupe :

$$Q_n = (1-\lambda^{2n})^2 - n^2\lambda^{2n-2}(1-\lambda^2)^2 \qquad (69)$$

avec :

$$\lambda = \frac{r_i}{r_e} \qquad (70)$$

Ce groupe n'est pas influencé par le mode de charge.

44. — Ces formules deviennent les suivantes pour les quatre cas particuliers considérés :

*Premier cas :*

Deux forces extérieures F supposées uniformément distribuées radialement sur une certaine étendue angulaire $\beta$, et agissant à l'intrados, c'est-à-dire en traction générale (fig. 44) :

$$A_0 = -\frac{r_i}{\pi(1-\lambda)^2} \cdot F, \quad C_0 = \frac{\lambda}{2\pi(1-\lambda^2)r_e} \cdot F \qquad (71)$$

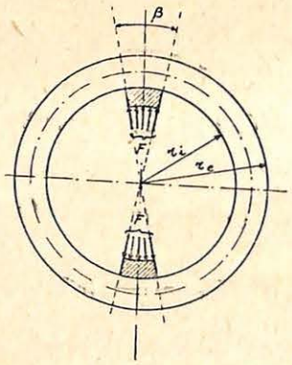



Fig. 44. — Anneau sollicité par une charge répartie à l'intrados.



Pour $n \geqq 2$ et ayant des valeurs paires seulement :

$$A_n = (-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi . r_i} . r_e^{-n+2} . \lambda^n . \frac{n(1-\lambda^2)+\lambda^2(1-\lambda^{2n})}{(n-1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (72)$$

$$B_n = -(-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi . r_i} . r_e^{-n} . \lambda^n . \frac{n(1-\lambda^2)+(1-\lambda^{2n})}{(n+1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (73)$$

$$C_n = (-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi . r_i} . r_e^{n+2} . \lambda^n . \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n}+\lambda^2(1-\lambda^{2n})}{(n+1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (74)$$

$$D_n = -(-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi . r_i} . r_e^{n} . \lambda^n . \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n}+(1-\lambda^{2n})}{(n-1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (75)$$

*Deuxième cas :*

Deux forces extérieures F supposées uniformément distribuées radialement sur une étendue angulaire $\beta$, et agissant à l'extrados, c'est-à-dire en compression générale (fig. 45) :

$$A_o = \frac{r_e.\lambda^2}{\pi(1-\lambda^2)} . F, \quad C_o = -\frac{1}{2\pi(1-\lambda^2)r_e} . F \qquad (76)$$

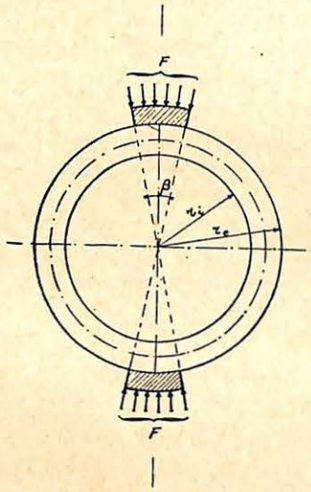



Fig. 45. — Anneau sollicité par une charge répartie à l'extrados.

Pour $n \geqq 2$ et ayant des valeurs paires seulement :

$$A_n = -(-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi.r_e} . r_e^{-n+2} .$$

$$. \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n}+(1-\lambda^{2n})}{(n-1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (77)$$

$$B_n = (-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi.r_e} . r_e^{-n} .$$

$$. \frac{n(1-\lambda^2)\lambda^{2n-2}+(1-\lambda^{2n})}{(n+1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (78)$$



$$C_n = -(-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi.r_e} . r_e^{n+2} . \lambda^{2n} .$$

$$. \frac{n(1-\lambda^2)+(1-\lambda^{2n})}{(n+1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (79)$$

$$D_n = (-1)^{(n/2)-1} \frac{F}{\pi.r_e} . r_e^{n} . \lambda^{2n-2} .$$

$$. \frac{n(1-\lambda^2)+(1-\lambda^{2n})\lambda^2}{(n-1)Q_n} . \frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} \qquad (80)$$

Ce deuxième cas est fort apparenté au cas des essais effectués sur tuyaux cylindriques, avec interposition d'une barette en bois régnant sur un certain angle.

*Troisième cas :*

Deux forces extérieures F supposées concentrées et agissant à l'intrados, c'est-à-dire en traction générale.

Dans ce cas, l'angle $\beta$ tend vers zéro, le groupe $\frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2}$ tend vers 1, donc les formules du premier cas restent applicables, mais se simplifient en posant :

$$\frac{\sin n . \beta/2}{n . \beta/2} = 1 \qquad (81)$$

Cela reproduit les formules déjà données antérieurement (formules 31 et 32 du § 12).

*Quatrième cas :*

Deux forces extérieures F supposées concentrées et agissant à l'extrados, c'est-à-dire en compression générale.

Dans ce cas, l'angle $\beta$ tend vers zéro, le groupe $\dfrac{\sin n \,.\, \beta/2}{n \,.\, \beta/2}$ tend vers 1, donc les formules du deuxième cas restent applicables, mais se simplifient en posant :

$$\frac{\sin n \,.\, \beta/2}{n \,.\, \beta/2} = 1 \qquad (82)$$

*Exemples numérique :*

*a)* La force intérieure est répartie sur un arc de 2°.

Les termes obtenus au n° 19 pour $n = 2, 4, 6, 8$ sont à multiplier respectivement par les coefficients réducteurs :

1 ; 1 ; 0,999 ; 0,998.

*b)* La force intérieure est répartie sur un arc de 10°.

Ces mêmes termes sont à multiplier respectivement par les coefficients réducteurs :

0,996 ; 0,979 ; 0,954 ; 0,920.

*c)* La force intérieure est répartie sur un arc de 15°.

Ces mêmes termes sont à multiplier respectivement par les coefficients réducteurs :

0,989 ; 0,954 ; 0,900 ; 0,827.



# ANNEXE II

*Application de la méthode de la résistance des matériaux à l'étude du maillon circulaire étançonné, sollicité par deux forces radiales égales et opposées* (fig. 46 et 47).

45. — La symétrie donne immédiatement :

$$T_O = 0,$$

$$M_O = 0,$$

$$T_A = -\frac{F}{2} \text{ (immédiatement à côté de la charge)}$$

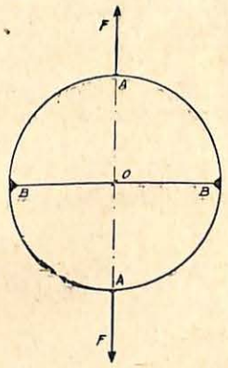



Fig. 46. — Maillon étançonné (sollicitation d'ensemble).

Les équations d'équilibre statique donnent en outre :

$$2 \,.\, N_A = -N_O \,.$$

Il y a donc deux inconnues hyperstatiques, par exemple : $M_A$ et $N_A$.

Les équations de déformation donnent :

$$\begin{cases} \Delta \varphi_A - \Delta \varphi_O = 0, \\ \Delta x_A - \Delta x_O = 0. \end{cases}$$

L'étançon n'est pas fléchi, il ne subit qu'un effort longitudinal.

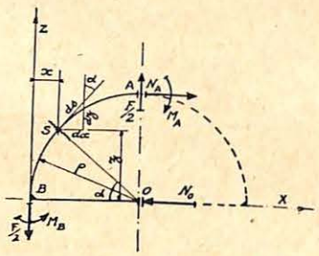


Fig. 47. — Maillon étançonné (sollicitation d'un quart du maillon).

La première équation de déformation revient à :

$$\Delta \varphi_A - \Delta \varphi_B = 0,$$

et elle donne :

$$\Delta \varphi_A - \Delta \varphi_B = \int_A^B \frac{M}{E.I} d s$$

L'équation devient :

$$\int_0^{\pi/2} \left[ M_A + N_A.\rho.(1 - \sin \alpha) - \frac{F}{2} . \rho . \cos \alpha \right] \rho . d \alpha = 0$$



$$M_A . \rho . \frac{\pi}{2} + N_A . \rho^2 . \frac{\pi}{2} - N_A . \rho^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha . d \alpha$$

$$- \frac{F}{2} . \rho^2 \int_0^{\pi/2} \cos \alpha . d \alpha = 0,$$

$$\frac{M_A}{\rho} . \frac{\pi}{2} + N_A . \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{F}{2} = 0 \qquad (83)$$

La seconde équation de déformation revient à :

$$\Delta x_A - \Delta x_O = (z_A - z_B) . \Delta \varphi_B + \int_B^A \frac{N}{E.\Omega} . d x$$

$$- \xi \int_B^A \frac{T}{G.\Omega} . d z + \int_B^A (z_A - z) . \frac{M}{E.I} . d s$$

$$+ \int_0^B \frac{N_0}{E.\Omega_0} (- d x)$$

Par raison de symétrie :

$$\Delta \varphi_B = 0$$

La figure 47 montre que nous avons :

$$T = \frac{F}{2} . \sin \alpha - N_A . \cos \alpha$$

$$N = \frac{F}{2} . \cos \alpha + N_A . \sin \alpha$$

$$M = M_A - \frac{F}{2} \cdot \rho \cdot \cos\alpha + N_A \cdot \rho\,(1 - \sin\alpha)$$

$$dx = ds \cdot \sin\alpha = \rho \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$dz = ds \cdot \cos\alpha = \rho \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha$$

$$ds = \rho \cdot d\alpha$$

Donc, l'équation devient :

$$\frac{M_A}{F.\rho} \cdot \frac{\rho^2}{E.I_a}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$+ \frac{N_A}{F}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{E.\Omega_a} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\xi}{G.\Omega_a} + \frac{3\pi}{4}\,\frac{\rho^2}{E.I_a}\right.$$

$$\left. - \frac{2\rho^2}{E.I_a} + 2 \cdot \frac{1}{E.\Omega_e}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{E.\Omega_a} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\xi}{G.\Omega_a} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\rho^2}{E.I_a}\right) = 0. \qquad (84)$$

Les équations (83) et (84) associées forment un système permettant de trouver $M_A$ et $N_A$. La question est ainsi résolue, et le résultat est le suivant :

$$\frac{M_A}{F.\rho} = \frac{1}{\pi} - \frac{N_A}{F}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \qquad (85)$$



$$\frac{N_A}{F} = \frac{-2 + 2\xi \cdot \dfrac{E}{G} + \dfrac{\rho^2 \cdot \Omega_a}{I_a} \cdot \left(\dfrac{8}{\pi} - 2\right)}{\pi + \pi \cdot \xi \cdot \dfrac{E}{G} + \left(\pi - \dfrac{8}{\pi}\right) \cdot \dfrac{\rho^2 \cdot \Omega_a}{I_a} + 8\,\dfrac{\Omega_a}{\Omega_e}} \qquad (86)$$

46. — Le calcul montre qu'il y a dans chaque demi-anneau, d'un côté de l'étançon, entre l'étançon et la charge, deux points d'inflexion $i_1$ et $i_2$ (fig. 48).

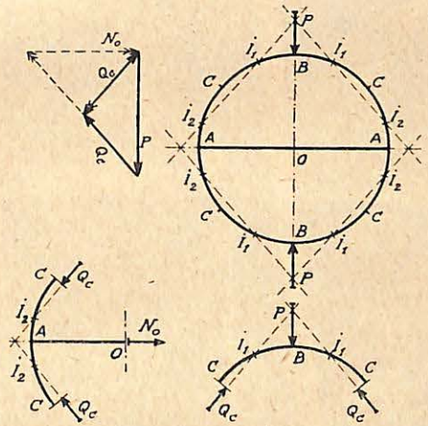



Fig. 48. — Maillon étançonné.
Sollicitation et équilibre de diverses portions.

La photo-élasticité nous confirme bien ce résultat (photo P-40), et donne ces points très exactement à la place indiquée par la théorie.

Lorsqu'il y a ainsi deux points d'inflexion entre lesquels ne se trouve ni charge extérieure ni nœuds, dans cette partie-là de l'ensemble le polygone des poussées est la droite qui joint ces points d'inflexion. Leur connaissance permet donc de lever de suite l'étude complète de ce maillon étançonné.

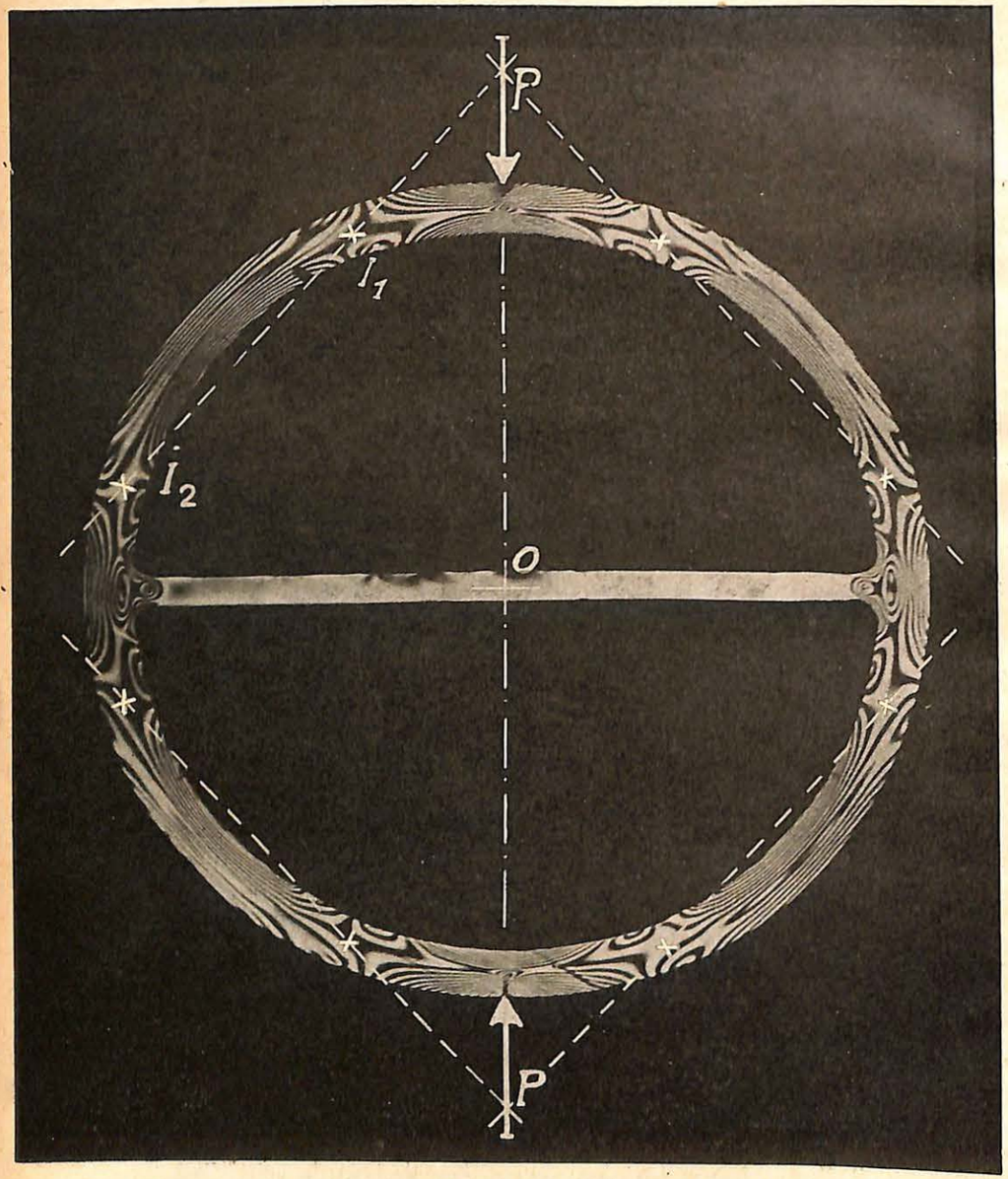



Photo P-40.
Maillon étançonné.
Lignes isochromatiques et points d'inflexion.

# L'Intervapeur Verviétoise
# ou
# La distribution urbaine de vapeur à Verviers

par

Paul HAIDANT,

Ingénieur Principal pour la Protection du Travail

et

Hector PAQUAY,

Ingénieur pour la Protection du Travail.

---

## I. — SITUATION EXISTANT EN 1935

De nombreuses usines textiles rassemblées à Dison et à Verviers disposaient chacune d'une installation productrice de vapeur.

On sait que les usines textiles sont de grosses consommatrices de vapeur qu'elles utilisent pour le chauffage par barbotage ou par surface des bains de teinture ou d'apprêts, des lavoirs de laine, des séchoirs, etc., et pour le conditionnement de l'atmosphère des ateliers (chauffage, humidification dans les ateliers de tissage et de filature).

Les installations productrices de vapeur fonctionnaient à une pression d'environ 7 Kg/cm², la vapeur pouvant être détendue pour ses utilisations à basse pression.

Les chaudières utilisées étaient de modèles anciens, elles étaient chargées à la main, plusieurs d'entre elles devaient être renouvelées à bref délai.

La force motrice utilisée était fournie par l'électricité sauf dans quelques usines produisant elles-mêmes la puissance