

# CARTE GÉNÉRALE

ET

## Abornements des Concessions minières

DU

### BASSIN DE LA CAMPINE

PAR

M. DEHALU

Professeur à l'Université de Liège

—  
*Suite* (1)  
—

#### Les calculs de réduction

*Longueur des fils.* — Les fils ont été comparés, sous la tension de 10 kg. à la base murale du Bureau international des poids et mesures. Les résultats de ces comparaisons sont indiqués dans la troisième colonne du tableau ci-dessous.

La quatrième colonne renseigne la formule de dilatation de chacun des fils, qui fut déterminée sur un échantillon, soumis à la même tension de 10 kg.

Objet	Époque	Corrections à 15° sous tension de 10 kg	DISTRIBUTION
fil n° 253	7 nov. — 5 déc. 1908	24 <sup>m</sup> — 0,18 <sup>m</sup> /m	$l_t = l_0 [ 1 - (228 + 0,4 t) t 10^{-9} ]$
fil n° 290	27 fév. - 1 mai 1909	24 — 0,60 <sup>m</sup> /m	$l_t = l_0 [ 1 - (121 - 0,15 t) t 10^{-9} ]$
ruban n° 35	août 1909	4 + 1,77 <sup>m</sup> /m	

(1) Voir *Annales des Mines de Belgique*. — Tome XXII (1921), 1<sup>re</sup> livraison

Les aciers au nickel à haute teneur éprouvent, avec le temps, des changements divers qu'un étuvage systématique à température graduellement descendante atténue considérablement.

Quoique les deux fils n° 253 et n° 290 aient été soumis à une série d'opérations de cette nature, nous avons tenu compte des variations de leur longueur depuis l'époque de leur étuvage jusqu'à celle de leur emploi sur le terrain, en nous servant du diagramme établi par M. Ch. Ed. Guillaume. Nous avons ainsi trouvé une correction de + 0<sup>mm</sup>,05 pour le fil n° 290 et + 0<sup>mm</sup>,06 pour le fil n° 253.

*Corrections de dilatation.* — A l'aide des deux formules contenues dans la quatrième colonne du tableau précédent nous avons calculé pour chacun des fils une table des corrections des dilatations pour 24 mètres, de 15 à 30 degrés de température.

*Corrections de pente.* — La correction due à la projection de la longueur de 24 mètres sur l'horizon est donnée par

$$24 (1 - \cos \alpha)$$

où  $\alpha$  représente l'angle de la pente.

La lunette du nivellement donnant directement les valeurs de  $\text{tg} \alpha$  en millièmes, la formule précédente s'écrira :

$$24 - \sqrt{\frac{24}{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$$

formule qui a été réduite en tables par M. Ch. Ed. Guillaume (table II pp. 80-84 de la brochure déjà citée).

Si l'on fait usage d'un niveau et d'une mire ordinaire de nivellement, on emploiera la formule suivante :

Désignons par  $S$  la longueur d'une portée,  $L$  sa projection sur l'horizon et  $h$  la différence de niveau entre ses deux extrémités ; il vient

$$L = \sqrt{S^2 - h^2}$$

$$\text{ou } \frac{L}{S} = \left(1 - \frac{h^2}{S^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{S^2} - \frac{1}{8} \frac{h^4}{S^4} - \dots$$

On déduit de là

$$S - L = \frac{1}{2} \frac{h^2}{S} \left[1 + \frac{h^2}{4S^2} + \dots\right]$$

Telle est la formule, limitée à ses deux premiers termes, qui a été appliquée à la réduction des mesures de la première et de la dernière portées de nos deux bases.

*Corrections dues à la déformation du fil.* — Le fil cesse d'être une chaînette symétrique dès que ses extrémités ne sont plus au même niveau. Cette théorie a été établie par Jäderin et l'on trouve dans la brochure de M. Ch.-Ed. Guillaume, p. 85, table III, les corrections à appliquer à un fil de 24 mètres sous la tension de 10 kg. Cette table a pour argument la tangente de l'angle de pente. Si la différence de niveau  $h$  est donnée, on calculera tout d'abord la valeur de  $\text{tg} \alpha$  correspondant à un rayon de 24 mètres.

*Réduction de la base au niveau de la mer.* — Si  $L$  représente la longueur de la base,  $N$  son altitude au-dessus du niveau de la mer et  $R$ , le rayon terrestre, la correction  $\alpha$  à retrancher de la valeur mesurée est donnée par la formule bien connue :

$$\alpha = L \frac{N}{R + N}$$

Pour la base de la Meuse, cette correction s'élève à 15,58 milli-mètres.

### Longueur de la base.

La longueur de la base se déduit de la formule

$$L = n \cdot c + s + l + a + \varepsilon$$

où  $n$  représente le nombre des portées  
 $c$ , la longueur étalonnée du fil entre ses zéros  
 $s$ , la somme des lectures de l'échelle  
 $l$ , la somme des corrections de niveau  
 $a$ , l'appoint  
 $\varepsilon$ , la somme des petites corrections dues à la dilatation du fil et à sa déformation.

On a trouvé,  $n$  étant ici égal à 92.

	Fil n° 253		Fil n° 290	
	1 <sup>re</sup> mesure	2 <sup>me</sup> mesure	1 <sup>re</sup> mesure	2 <sup>me</sup> mesure
$nc$	2207988.96	2207988.97	2207949.40	2207949.40
$s$	— 610.33	+ 230.13	— 565.46	+ 285.46
$l$	— 291.00	— 255.91	— 291.00	— 255.91
$a$	+ 3319.95	+ 2447.50	+ 3319.95	+ 2447.50
$\varepsilon$	+ 0.70	— 1.05	— 0.70	— 1.05
	2210408.28	2210409.63	2210413.59	2210416.20
Moyennes	2210408.95		2210414.90	

Moyenne des 2 fils . . . . . 2210411.93

Réduction au niveau de la mer . . . . . — 15.58

Longueur finale de la base . . . . . **2210396.35**

*Précision du résultat.* — Pour se rendre compte de la précision obtenue, il convient d'évaluer l'erreur probable du résultat. Examinons donc les diverses erreurs qui ont pu affecter les observations. Nous trouvons ainsi :

1° Erreur probable du prototype. La longueur de la base murale au pavillon de Breteuil a été déterminée au moyen d'une règle prototype en invar de 4 mètres de longueur dont l'erreur probable peut être évaluée à  $\pm 0^{\text{mm}},0001$  ; son effet sur la longueur de la base est  $\pm 0^{\text{mm}},22$ .

2° L'erreur probable de la base murale à un moment donné ne dépasse pas  $\pm 0^{\text{mm}},01$  ; d'où pour les 92 portées que comporte la base de la Meuse, une erreur probable de  $92 \times 0.01 = \pm 0^{\text{mm}},92$ .

3° L'erreur probable de la détermination de la longueur d'un fil à l'aide de la base murale peut être estimée à  $\pm 0^{\text{mm}},009$  ; comme nous avons fait usage de deux fils, l'erreur probable relative est ici :

$$\pm \frac{0,009 \times 92}{\sqrt{2}} = \pm 0,58.$$

4° L'erreur probable qui pourrait résulter de l'ignorance de la température vraie des fils est vraisemblablement négligeable. En effet, les températures, prises au thermomètre fronde, n'ont varié que de  $14^{\circ}7$  à  $20^{\circ}0$ , au cours de la première mesure, et de  $19^{\circ}0$  à  $25^{\circ}$ , au cours de la seconde. Les corrections de dilatation s'élevèrent à  $- 0^{\text{mm}},61$ , dans le premier cas, et à  $- 1^{\text{mm}},95$ , dans le second, pour toute la longueur de la base.

Un écart de quelques degrés dans la température serait donc sans influence appréciable sur le résultat.

5° L'erreur probable de la mesure se déduit de la comparaison des quatre valeurs obtenues ; elle est égale à  $\pm 1^{\text{mm}},05$ .

L'erreur probable sur la base s'élève finalement à

$$\pm \sqrt{0,22^2 + 0,93^2 + 0,58^2 + 1,05^2} = \pm 1^{\text{mm}},53.$$

La précision obtenue est donc de l'ordre de  $\frac{1}{1,431,641}$ .

#### Base de Lommel.

Cette base est une partie de la base géodésique de Lommel, mesurée en 1851, à l'aide des règles de Bessel, en vue de l'exécution de la triangulation du royaume. Elle s'étend du terme oriental de cette base jusqu'en un point situé à la lisière du bois qui, à l'époque de nos travaux, abritait le terme occidental.

En vue d'établir la comparaison entre le procédé classique des règles de Bessel et celui des fils, nous reprîmes la mesure de la base géodésique.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les résultats de nos observations ont fait l'objet d'une note présentée à l'Académie royale de Belgique. L'erreur probable de la base telle qu'elle résulte de nos mesures s'est élevée à  $\pm 1^{\text{mm}},77$ , tandis que l'erreur probable des déterminations faites en 1852 n'était que de  $\pm 1^{\text{mm}},36$ . L'écart entre les deux mesures fut trouvé égal à  $3^{\text{mm}},30$ . Il pourrait s'expliquer en partie par l'insuffisance des corrections apportées à la longueur des fils par suite de leur vieillissement. D'ailleurs l'accord entre les deux valeurs obtenues peut être considéré comme satisfaisant, si l'on s'en rapporte aux circonstances défavorables qui accompagnèrent nos déterminations, comme nous le verrons plus loin.

La base géodésique est repérée sur le terrain par trois bornes en bronze qui surmontent des repères souterrains (1) qui furent mis à jour pour la durée de nos observations. Celles-ci terminées, les termes furent replacés exactement dans leur position primitive.

Aux deux extrémités de la base de notre triangulation, nous fîmes édifier deux signaux en bois, en forme de pyramides quadrangulaires dont les sommets furent amenés soigneusement sur les verticales des repères établis au sol.

Le repère oriental était celui de la base géodésique et le repère occidental était constitué par un fort piquet de bois enfoncé profondément dans le sol qu'il dépassait de 0<sup>m</sup>,50 environ et portant en son milieu une goupille en cuivre pourvue de deux traits perpendiculaires.

Le placement de ce repère sur l'alignement de la base géodésique fut effectué à l'aide d'un théodolite installé au terme occidental de celle-ci.

Nos opérations s'étendirent du 27 septembre ou 2 octobre 1912. Nos collaborateurs étaient : M. G. Maury, directeur au Ministère des Colonies, le lieutenant M. Decraene et M. Ledoux, géomètre aux charbonnages de Beeringen et Coursel.

Une dizaine de soldats, mis obligeamment à notre disposition par M. le Commandant Jauquet, complétaient nos équipes et assuraient, avec nos aides habituels, le transport, tout le long de la base, du matériel nécessaire aux mesures des nombreuses portées.

Le 29 septembre, la pluie interrompit nos opérations et le rappel à Bruxelles, le même jour, de M. G. Maury, nous priva pour la suite d'une collaboration qui nous était particulièrement précieuse. La nuit du 30 septembre, un ouragan détruisit le signal édifié au-dessus du terme oriental et renversa les balises disposées le long de la base. Le temps s'étant remis au beau, le 1<sup>er</sup> octobre, nous espérons pouvoir poursuivre nos mesures, mais le licenciement de la classe de milice vint nous priver des soldats du Commandant Jauquet.

Ce même jour, le lieutenant Decraene nous quitta pour rejoindre son corps. Le 2 octobre, de jeunes recrues, arrivées la veille au camp de Béverloo, ayant été mises à notre disposition, nous achevâmes les mesures avec ce nouveau personnel qu'il fallut tout

(1) Voir Triangulation du Royaume de Belgique, 1<sup>re</sup> partie, livre 2, p. 18

d'abord instruire. Heureusement ces incidents n'exercèrent pas une influence défavorable sur les résultats.

Pour le jalonnement on installa le théodolite au terme occidental de la base géodésique. Un aide porteur d'une douzaine de jalons parcourait la base en partant du terme oriental et plantait un jalon tous les deux cents mètres environ.

Pour lui transmettre les signaux de l'observateur, on plaça trois aides, munis de drapeaux attachés à de longues perches, l'un immédiatement derrière l'observateur, un autre à la lisière du bois et le troisième vers le milieu de la base géodésique.

Tous les signaux à bras exécutés par l'observateur, visant à l'aide du théodolite dans la direction de la base, étaient immédiatement répétés par les aides au moyen de leurs drapeaux. Les hampes de ceux-ci tenues verticalement, leur extrémité inférieure reposant sur le sol, marquaient la phase de repos. Le début des opérations nécessaires à la pose d'un jalon dans l'alignement de la base était indiqué en soulevant le plus haut possible les hampes des drapeaux qu'on maintenait verticalement. Toute inclinaison de ceux-ci soit à droite, soit à gauche, signifiait que l'aide devait déplacer le jalon dans le sens indiqué. Sitôt celui-ci amené dans l'alignement, les hampes des drapeaux étaient redressées verticalement. L'aide enfonçait alors provisoirement le jalon dans le sol et attendait de nouveaux ordres. Si l'observateur jugeait la position satisfaisante, il faisait agiter les drapeaux, puis commandait la position de repos.

L'aide chargé du jalonnement reprenait alors sa marche en avant et les opérations se poursuivaient de la même manière.

Un certain nombre de jalons furent ensuite remplacés par des balises de 4 mètres environ de hauteur maintenues verticalement à l'aide de trois fils de fer faisant l'office de haubans.

Pour les mesures on fit usage des fils n° 253 et n° 290 et l'on eut recours aux mêmes procédés d'observation qui furent décrits pour la base de la Meuse.

#### Longueur de la base.

Elle se déduit de la formule donnée page 27. Dans le calcul on a tenu compte de l'allongement probable des fils depuis l'époque de leur étalonnage.

On a trouvé en prenant  $n = 79$  pour la 1<sup>re</sup> mesure et  $n = 78$ , pour la seconde mesure :

	Fil n° 253		Fil n° 290	
	1 <sup>re</sup> mesure	2 <sup>e</sup> mesure	1 <sup>re</sup> mesure	2 <sup>e</sup> mesure
<i>nc</i>	1895992.10	1871992.20	1895958.13	1871958.66
<i>s</i>	+ 2630.65	+ 980.60	+ 2665.24	+ 1017.08
<i>e</i>	- 69.23	- 75.49	- 69.23	- 75.49
<i>a</i>		+ 25648.52		+ 25648.52
Moyennes :	1898549.67		1898551.45	

Moyennes des deux fils. . . . . 1898550.56

Réduction au niveau de la mer . . . . . - 14.30

Longueur adoptée . . . . . 1898536.26

*Précision du résultat.* — Comme précédemment nous trouvons :

1° Erreur probable du prototype :  $\pm 0^{\text{mm}},20$ .

2° Erreur provenant de l'incertitude sur la base murale :  $\pm 0^{\text{mm}},79$ .

3° Erreur probable sur la longueur des fils :  $\pm 0^{\text{mm}},45$ .

4° Erreur probable de dilatation :  $\pm 0,00$ .

5° Erreur probable de la mesure :  $\pm 1^{\text{mm}},15$ .

L'erreur probable sur la longueur totale de la base s'élève donc à

$$\pm \sqrt{0.20^2 + 0.79^2 + 0.45^2 + 1.15^2} = \pm 1^{\text{mm}},48$$

soit une précision de l'ordre de

$$\frac{1}{1,282,804}$$

#### Mesure des angles.

Les mesures angulaires furent effectuées à l'aide d'un théodolite de « Troughton and Simms » de Londres, du modèle adopté pour le service géographique de l'armée britannique.

Les cercles de cet appareil ont 125 millimètres de diamètre; ils sont divisés en 10' et se lisent au moyen de deux microscopes micrométriques opposés, dont les tambours portent 60 divisions. Chacune de celles-ci vaut donc 10"; mais on peut facilement apprécier la seconde à l'estime. La lunette a une distance focale de 300 millimètres et l'ouverture de l'objectif est de  $37^{\text{mm}},5$ .

En campagne, l'instrument se place sur un trépied robuste à trois branches doubles dont la tête est pourvue d'un système à translation qui permet le centrage rigoureux de l'instrument au dessus du repère marquant sur le sol le point de station.

Pour le transport, le théodolite se démonte en deux parties qui prennent place dans deux caisses en bois encloses dans de fortes gaines de cuir.

Pour la mesure des angles, suivant l'importance des stations, on a eu recours à l'un des deux procédés classiques suivants :

1° *Tour d'horizon.* — Il consiste à viser successivement, dans l'ordre où ils se présentent, tous les signaux visibles.

Si 0 (fig. 10) représente le centre de la station d'observation et

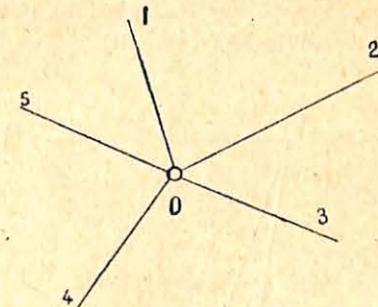


FIG. 10.

1, 2, 3, 4, 5, les signaux visibles de 0, on effectue les visées des directions 01, 02, ..., 05, 01 et l'on fait les lectures correspondantes au cercle horizontal; leurs différences prises deux à deux donnent les valeurs des angles horizontaux entre les directions choisies.

2° *Mesure directe.* — Chaque angle est mesuré indépendamment des autres. Ainsi on mesurera les angles :

102	203	304	405
103	204	305	
104	205		
105			

La seconde méthode fut appliquée pour les mesures des angles aux sommets de la triangulation primaire.

On y effectua généralement quatre doubles séries de mesures dans quatre secteurs du cercle horizontal qui différaient de 90 degrés, une première fois dans la position du cercle vertical à la droite de l'observateur (C. D.) et une seconde fois dans la position inverse, le cercle vertical étant à la gauche de l'observateur (C. G.) supposé dans la même position.

Pour les points moins importants, le nombre des mesures fut réduit à quatre ou même à deux, la moitié de celles-ci étant effectuée C. D. et l'autre moitié C. G.

*Réduction au centre de station.* — Si le théodolite n'occupe pas le centre de la station, il est possible, comme on sait, de tenir compte de l'erreur commise dans la mesure des angles. La formule de correction est connue sous le nom de *réduction au centre de station*. Pour éviter toute incertitude dans le signe de cette correction, on peut procéder comme suit :

Soient ABC (fig. 11) les trois sommets d'un triangle dont on connaît le côté AB et les angles BAC et ABC.

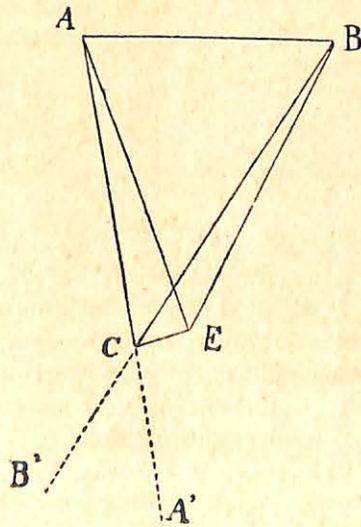


FIG. 11.

Si en un point E, voisin de C, on a mesuré les angles AEB et AEC et la distance  $EC = r$ , on aura, en posant

$$CAE = x, CBE = y, ACB = C \text{ et } AEB = E :$$

$$(1) C = E + y - x$$

$$\sin x = \frac{r}{AC} \sin AEC$$

$$\sin y = \frac{r}{BC} \sin BEC$$

La formule (1) n'est pas générale et s'applique au cas de la fig. 11; elle est vraie pour tout point E situé dans l'angle BCA'.

Supposons maintenant que le terrain soit partagé par les droites ACA' et BC'B' en quatre régions désignées par

$$1^{\text{re}} \text{ région} = \text{angle } BCA', 2^{\text{me}} \text{ région} = \text{angle } ACB$$

$$3^{\text{me}} \text{ région} = \text{angle } ACB', 4^{\text{me}} \text{ région} = \text{angle } A'CB';$$

on aura :

$$\text{Si E se trouve dans la } 1^{\text{re}} \text{ région, } C = E + y - x$$

$$\text{Id. } 2^{\text{me}} \text{ région, } C = E - x - y$$

$$\text{Id. } 3^{\text{me}} \text{ région, } C = E + x - y$$

$$\text{Id. } 4^{\text{me}} \text{ région, } C = E + x + y$$

et comme cas particuliers :

$$\text{Si E se trouve sur } \begin{cases} CB, C = E - x \\ CB', C = E + x \\ CA, C = E - y \\ CA', C = E + y \end{cases}$$

*Exemple.* — Comme application nous donnerons le calcul de la réduction au centre de la station VIII (fig. 12), cheminée des Liégeois,

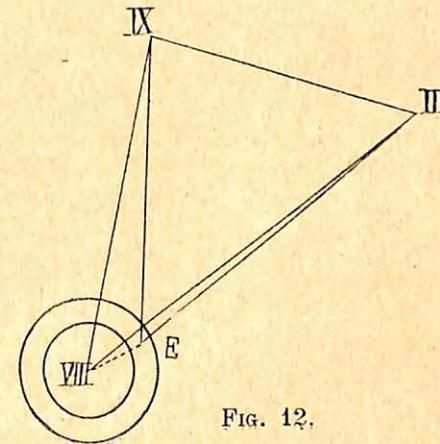


FIG. 12.

où les angles furent mesurés du haut d'un balcon circulaire situé à 20 mètres environ au-dessus du sol et placé extérieurement à un réservoir d'eau entourant la cheminée.

La distance E VIII du théodolite au centre de la cheminée fut déterminée comme suit : à l'aide d'un ruban métallique de 20 mètres de longueur, on mesura la circonférence de la cheminée à la hauteur des tourillons de la lunette. On trouva ainsi 22<sup>m</sup>,94, ce qui correspond à un rayon de 3<sup>m</sup>,651. La distance du centre du théodolite à la paroi externe de la cheminée, évaluée à la hauteur des tourillons, étant 0<sup>m</sup>,465, la distance totale du centre du théodolite au centre de la cheminée était donc :

$$E \text{ VIII} = 4,116 \text{ mètres.}$$

Comme il était impossible de viser avec certitude du point E, où le théodolite était installé, le centre de la cheminée, on visa tangentiellement les deux bords de celle-ci en plaçant la lunette dans une position sensiblement horizontale et l'on prit la moyenne des lectures au cercle horizontal.

Une série de pointés sur les sommets III et IX de la triangulation primaire permit de déduire la valeur de l'angle III E IX, on trouva ainsi :

$$\begin{aligned} III \text{ E IX} &= 36^{\circ} 51' 26'' = E \\ IX \text{ E VIII} &= 139. 37. 26 \\ \text{Somme} = III \text{ E VIII} &= 176^{\circ} 28' 52. \end{aligned}$$

Dans le triangle III IX VII, les éléments connus sont :

$$\begin{aligned} \text{côté III-IX} &= 8456 \text{ mètres environ} \\ III &= 30^{\circ} 35' 41'' \\ IX &= 112. 34. 11 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$VIII = 36^{\circ} 50' 08''$$

$$\text{et III-VIII} = \frac{8456}{\sin VIII} \sin IX = 13024 \text{ mètres}$$

$$VIII-IX = \frac{III \text{ IX}}{\sin VIII} \sin III = 7178 \text{ mètres}$$

La réduction au centre de la station VIII se calcule alors comme suit :

$$\sin x = \frac{4.116}{7178} \sin 139^{\circ} 27' 26'' \quad x = 76'' 6$$

$$\sin y = \frac{4.116}{13024} \sin 176^{\circ} 28' 52'' \quad y = 4'' 0$$

E	36° 51' 26''
x	— 1 17
y	+ 04
VIII	36° 50' 13''

#### Compensations.

Il s'agit maintenant de compenser les angles mesurés qui satisfont à certaines équations de condition. Voici la voie que nous avons suivie.

1° En chaque sommet de la triangulation, si l'on désigne par  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les angles mesurés, on a une relation de la forme :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 360 + x$$

où  $x$  représente l'écart angulaire de fermeture du tour d'horizon.

Cette valeur de  $x$  est répartie également sur chacun des angles  $a_i$ .

2° Dans un triangle A B C, l'on a entre les trois angles mesurés, la condition :

$$A + B + C = 180 + y$$

$y$  désignant l'erreur de fermeture du triangle (1).

Comme précédemment cet écart  $y$  se répartit également sur les trois angles mesurés.

3° Pour un quadrilatère, la compensation est plus compliquée. Le procédé suivant a été appliqué aux quadrilatères d'extension des bases de la Meuse et de Lommel.

(1) Nous faisons abstraction de l'excès sphérique qui, dans le cas de nos triangles, est négligeable.

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_8$  (fig. 13), les vraies valeurs des angles du

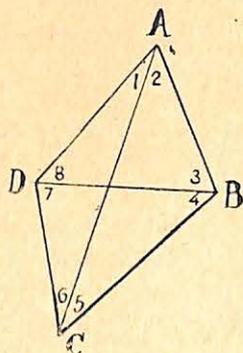


FIG. 13.

quadrilatère A B C D, ces angles étant numérotés dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, on a :

$$\left. \begin{aligned} a_8 + a_1 + a_2 + a_3 &= 180^\circ \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 180^\circ \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 180^\circ \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_1 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} (1)$$

et  $\frac{DC}{\sin a_1} = \frac{DA}{\sin a_6}, \frac{DA}{\sin a_3} = \frac{AB}{\sin a_8}, \frac{AB}{\sin a_5} = \frac{BC}{\sin a_2}, \frac{BC}{\sin a_7} = \frac{CD}{\sin a_4}$

d'où l'on tire, en multipliant ces égalités membre à membre :

$$(2) \quad \sin a_1 \sin a_2 \sin a_5 \sin a_7 = \sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8$$

En général, les valeurs observées  $a_i$  des angles ne satisfont pas aux relations (1) et (2). Mais au lieu de chercher les corrections angulaires qui satisfont à la fois aux équations de conditions (1) et (2), nous avons préféré, à l'exemple de plusieurs géodésiens, déterminer d'abord les corrections qu'on peut déduire de (1), puis de (2) en tenant compte des premières.

Soient  $C_1, C_2, C_3, C_4$  les erreurs de fermeture des quatre triangles DAB, ABC, BCD, CDA, et  $y_1, y_2, \dots, y_8$  les corrections à faire subir aux angles mesurés pour satisfaire aux relations (1), on aura,

$$\left. \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_8 &= -C_1 \\ y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= -C_2 \\ y_4 + y_5 + y_6 + y_7 &= -C_3 \\ y_6 + y_7 + y_8 + y_1 &= -C_4 \end{aligned} \right\} (3)$$

Ces équations ne sont pas indépendantes puisque l'on a

$$C_1 + C_3 = C_2 + C_4;$$

nous pouvons donc les supposer réduites aux trois premières, par exemple.

D'après la théorie des moindres carrés, la somme des carrés des erreurs des  $y$  doit être rendue minimum, on a donc

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_8^2 = \text{minimum.} \quad (4)$$

Différentiant (3) et (4), il vient

$$\left. \begin{aligned} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3 + y_4 dy_4 + y_5 dy_5 + y_6 dy_6 + y_7 dy_7 + y_8 dy_8 &= 0 \\ dy_1 + dy_2 + dy_3 + dy_4 + dy_5 + dy_6 + dy_7 + dy_8 &= 0 \\ dy_2 + dy_3 + dy_4 + dy_5 + dy_6 + dy_7 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Multiplions les trois dernières équations par les coefficients  $k, l, m$  et soustrayons les de la première en égalant à zéro les coefficients des différentielles, en vue de satisfaire à la condition (4), on aura

$$\left. \begin{aligned} y_1 = y_8 &= k \\ y_2 = y_3 &= k + l \\ y_4 = y_5 &= l + m \\ y_6 = y_7 &= m \end{aligned} \right\} (5)$$

Substituant ces valeurs dans (3), on trouve

$$\left. \begin{aligned} 4k + 2l &= -C_1 \\ 2k + 4l + 2m &= -C_2 \\ 2l + 4m &= -C_3 \end{aligned} \right\} (6)$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{aligned} 8k &= 2C_2 - 3C_1 - C_3 \\ 8l &= -4C_2 + 2C_1 + 2C_3 \\ 8m &= 2C_2 - 3C_3 - C_1 \end{aligned} \right\}$$

Portant ces valeurs dans (5), on trouve finalement

$$\left. \begin{aligned} y_1 = y_8 &= \frac{1}{8} [2C_2 - 3C_1 - C_3] \\ y_2 = y_3 &= \frac{1}{8} [-2C_2 - C_1 + C_3] \\ y_4 = y_5 &= \frac{1}{8} [-2C_3 + C_1 - C_3] \\ y_6 = y_7 &= \frac{1}{8} [2C_2 - C_1 - 3C_3] \end{aligned} \right\} (7)$$

Telles sont les corrections déduites des équations de condition (3); mais on peut les mettre sous une forme plus simple pour le calcul.

Ces équations peuvent, en effet, s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{8} [-C_1 + C_3 - 2C_4] = \frac{1}{8} C_3 - \frac{3}{8} C_4 + \frac{1}{8} [C_4 - C_1] \\ y_2 &= \frac{1}{8} [-2C_2 - C_1 + C_3] = \frac{1}{8} C_3 - \frac{3}{8} C_2 + \frac{1}{8} [C_2 - C_1] \\ y_3 &= \frac{1}{8} [-3C_1 + 2C_4 - C_3] = \frac{1}{8} C_4 - \frac{3}{8} C_1 + \frac{1}{8} [C_4 - C_3] \\ y_4 &= \frac{1}{8} [+2C_4 - C_1 - 3C_3] = \frac{1}{8} C_4 - \frac{3}{8} C_3 + \frac{1}{8} [C_4 - C_1] \\ y_5 &= \frac{1}{8} [-2C_2 + C_1 - C_3] = \frac{1}{8} C_1 - \frac{3}{8} C_2 + \frac{1}{8} [C_2 - C_3] \\ y_6 &= \frac{1}{8} [+C_1 - 2C_4 - C_3] = \frac{1}{8} C_1 - \frac{3}{8} C_4 + \frac{1}{8} [C_4 - C_3] \\ y_7 &= \frac{1}{8} [2C_2 - C_1 - 3C_3] = \frac{1}{8} C_2 - \frac{3}{8} C_3 + \frac{1}{8} [C_2 - C_1] \\ y_8 &= \frac{1}{8} [2C_2 - 3C_1 - C_3] = \frac{1}{8} C_2 - \frac{3}{8} C_1 + \frac{1}{8} [C_2 - C_3] \end{aligned} \right\} (8)$$

Le dernier terme étant, en général, négligeable ces équations se réduiront à

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{8} C_3 - \frac{3}{8} C_4 & y_2 &= \frac{1}{8} C_3 - \frac{3}{8} C_2 & y_3 &= \frac{1}{8} C_4 - \frac{3}{8} C_1 \\ y_4 &= \frac{1}{8} C_4 - \frac{3}{8} C_3 & y_5 &= \frac{1}{8} C_1 - \frac{3}{8} C_2 & y_6 &= \frac{1}{8} C_1 - \frac{3}{8} C_4 \\ y_7 &= \frac{1}{8} C_2 - \frac{3}{8} C_3 & y_8 &= \frac{1}{8} C_2 - \frac{3}{8} C_1 \end{aligned} \right\} (9)$$

Elles permettent d'énoncer la règle suivante : *la correction à faire subir à un angle est égale à  $-\frac{3}{8}$  de l'écart de fermeture du triangle qui contient cet angle  $+\frac{1}{8}$  de l'écart de fermeture du triangle formé par les trois sommets restants.*

Une démonstration directe des formules (9) a été tentée par M. Kraitchik, dans les *Mémoires de la société royale des sciences de Liège*, 3<sup>e</sup> série, t. X, 1913; mais elle s'appuie sur une hypothèse toute gratuite qui lui enlève toute rigueur (1). Notre exposé est une application directe de la théorie des moindres carrés.

Il s'agit maintenant de satisfaire à la condition (2) qui peut s'écrire si l'on pose  $a_i = x_i + dx_i$  :

$$\lg \sin (x_1 + dx_1) - \lg \sin (x_2 + dx_2) + \dots = 0.$$

Développons cette expression, en négligeant les termes du second ordre, il vient

$$\lg \sin x_1 + \frac{d}{dx_1} (\lg \sin x_1) dx_1 - \lg \sin x_2 - \frac{d}{dx_2} (\lg \sin x_2) dx_2 + \dots = 0.$$

Mais

$$\frac{d}{dx_1} (\lg \sin x_1) = \delta_1 = \text{la différence tabulaire de } 1'' \text{ pour l'angle } x_1,$$

dans une table de log. sin; on a donc

$$\delta_1 dx_1 - \delta_2 dx_2 + \dots + \delta_7 dx_7 - \delta_8 dx_8 + \lg \sin x_1 - \lg \sin x_2 + \dots = 0.$$

et si nous posons.

$$dx_i = z_i \text{ et } \lg \sin x_1 - \lg \sin x_2 + \dots = D,$$

cette équation prendra la forme.

$$(10) \delta_1 z_1 - \delta_2 z_2 + \dots = -D.$$

Les  $z_i$  doivent, en outre, satisfaire à la condition

$$(11) z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_8^2 = \text{minimum}$$

Différentiant les équations 10 et 11, il vient

$$\begin{aligned} \delta_1 dz_1 - \delta_2 dz_2 + \dots &= 0 \\ z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + \dots &= 0 \end{aligned}$$

(1) Ces formules nous avaient été communiquées par M. G. Maury, Directeur du service cartographique aux Ministère des Colonies, qui les tenait de géodésiens anglais; dans l'ignorance de leur démonstration j'avais engagé M. Kraitchik à en tenter la recherche; telle fut l'occasion de la note qu'il a publiée.

Multiplions la première équation par  $q$  et retranchons la de la seconde, puis égalons à zéro les coefficients des  $dz_i$ , on aura

$$z_1 = q \delta_1 \dots z_2 = -q \delta_2 \dots$$

Substituant dans (10) on trouve

$$q = - \frac{D}{\sum \delta_i^2}$$

Posant

$$\sum \delta_i^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = [\delta\delta]$$

on a finalement

$$12) \quad z_1 = - \frac{D}{[\delta\delta]} \delta_1 \quad z_2 = + \frac{D}{[\delta\delta]} \delta_2 \text{ etc.}$$

Telles sont les nouvelles corrections à faire subir aux angles du quadrilatère.

Comme on le voit par les formules (12) la correction  $z_i$  (en secondes) est positive (ou négative) pour tous les angles de rang pair (ou impair) et négative (ou positive) pour tous les angles de rang impair (ou pair) suivant que  $D$  est positif ou négatif.

Pendant, si l'angle  $a_i$  est compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ , le signe de  $z_i$  doit être changé, car dans ce cas le sinus décroît lorsque l'angle croît.

Lorsque les angles  $a_i$  auront subi les deux corrections  $y_i$  et  $z_i$ , on recommencera les mêmes calculs et l'on obtiendra par deux applications de cette méthode des valeurs compensées des angles du quadrilatère.

On trouvera plusieurs applications de cette méthode dans la seconde partie de cette publication.

### Calcul des triangles.

Après avoir fait subir aux angles mesurés les compensations nécessaires, on procède au calcul des côtés des triangles.

Dans ce but nous fimes exclusivement usage d'une table (1) donnant les valeurs naturelles à sept décimales des sinus et cosinus de tous les angles compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , de  $10''$  en  $10''$ , avec des parties proportionnelles pour chaque seconde. Les produits et quotiens étaient effectués au moyen d'une machine à calculer du genre « Dactyle » pouvant donner des produits de treize chiffres. La préci-

sion obtenue de cette manière est comparable à celle qui résulte de l'emploi d'une table de logarithmes à sept décimales. Mais les avantages sont importants : une plus grande simplicité de calculs, une très grande rapidité d'exécution et une moindre fatigue.

Supposons qu'il s'agisse de calculer les côtés  $b$  et  $c$  dans un triangle dont on connaît le côté  $a$  et les trois angles, nous aurons :

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \sin C$$

On calcule d'abord le quotient  $\frac{a}{\sin A}$  qu'on inscrit sur la machine comme multiplicande ; puis on multiplie ce nombre successivement par  $\sin B$  et  $\sin C$ .

Exemple :

	Angles		
	mesurés	compensés	
A	51° 50' 59" 5	51° 50' 59"	$a = 3100.40$
B	52.35. 8.5	52.35.08	$\frac{a}{\sin A} = 3942.55$
C	75.33.54.5	75.33.53	$b = 3942.55 \sin B = 3131.42 \text{ m.}$
	180.00.02.5	180.00.00	$c = 3942.55 \sin C = 3818.08 \text{ m.}$

(A suivre.)

(1) Tables of Natural Sines and Cosines by C. L. H. Max Jurisch, Cape Town, Herrmann Michaelis.