

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE

DE

l'Inertie de masses rotatives

PAR

M. R. VAN CAUWENBERGHE

Ingénieur à Bruxelles.

L'étude analytique des machines d'extraction, des laminoirs réversibles, des alternateurs couplés en parallèle, des trains électriques à démarrage rapide suppose connu le PD^2 des masses rotatives qui entrent en jeu.

Le calcul de ces moments d'inertie est long, parfois difficile, souvent peu rigoureux. Leur détermination expérimentale peut, dans certains cas, être plus rapide et surtout plus précise.

Nous avons appliqué à l'atelier la méthode suivante pour la détermination des moments d'inertie de trains de roues et d'induits de moteurs de traction :

Un induit I (voir croquis, page suivante) repose horizontalement par ses tourillons de rayon r sur 2 rails AA horizontaux et perpendiculaires à son axe O.

Un collier C serré sur le corps de l'induit porte une masse excentrée S. Le pendule composé ainsi constitué est écarté de sa position d'équilibre et l'on observe la fréquence de ses oscillations.

Soient :

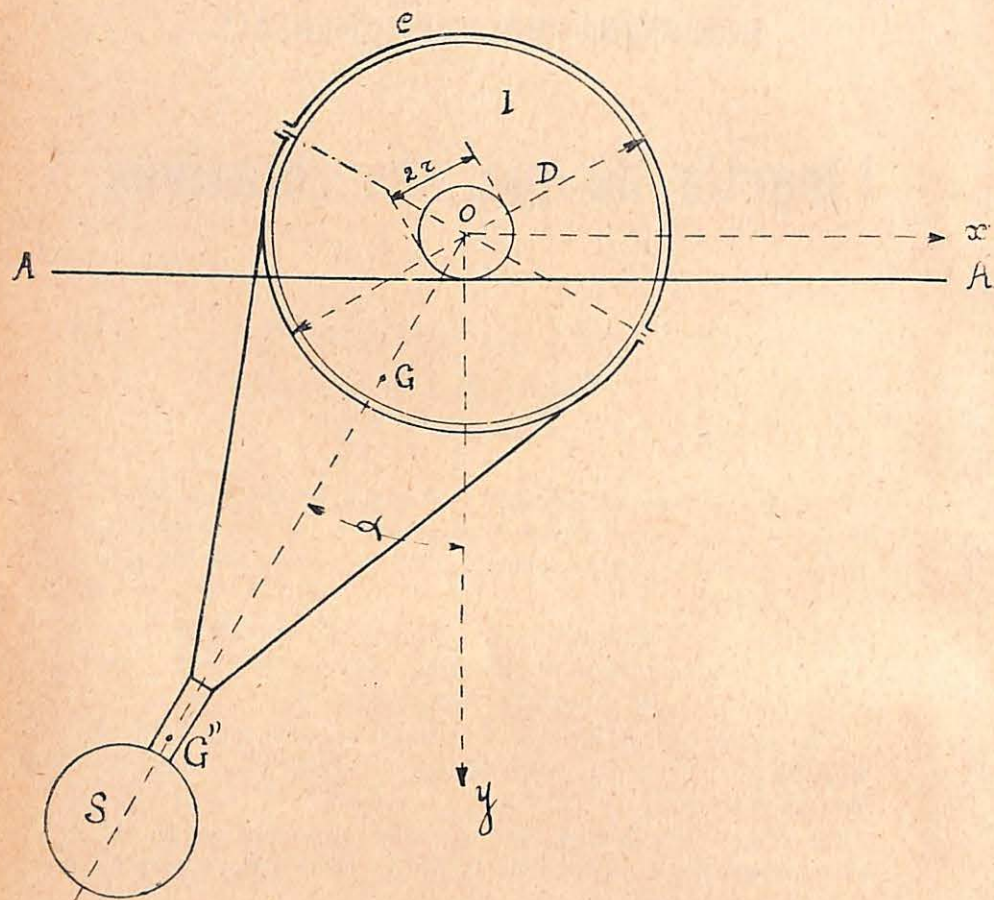
M la masse du pendule composé

G son centre de gravité.

ρ son rayon de giration autour d'un axe passant par G et parallèle à l'axe O.

v la vitesse instantanée du centre de gravité G.

$R = OG$.



La force vive T du système est donnée par la relation

$$2 T = M v^2 + M \rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2$$

D'ailleurs les composantes de la vitesse suivant les axes de coordonnées sont

$$v_x = r \frac{d\alpha}{dt} - R d\alpha \cos \alpha$$

$$v_y = - R \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha$$

Par suite

$$2 T = M \left[\rho^2 + R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2$$

D'autre part la puissance des forces s'écrit

$$\Sigma \overline{F} \overline{v} = M g v_y = - M g R \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha$$

et l'on a

$$(1) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M \left[\rho^2 + R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha \right] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right\} \\ = - M g R \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha$$

On limitera l'amplitude des oscillations à quelques degrés. Cette précaution permet de remplacer dans la relation ci-dessus $\cos \alpha$ par 1 et $\sin \alpha$ par α .

En dérivant et divisant par $\frac{d\alpha}{dt}$ on obtient l'équation différentielle

$$(2) \quad M \left[\rho^2 + (R - r)^2 \right] \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M g R \alpha = 0$$

dont la solution connue s'écrit

$$\alpha = A \sin \omega t$$

avec

$$(3) \quad \omega^2 = \frac{g R}{\rho^2 + (R - r)^2} = (2 \pi \nu)^2$$

ν étant le nombre d'oscillations doubles par seconde.

Pour déduire de cette formule le rayon de giration de l'induit autour de son axe O on désignera par

M' la masse de l'induit
 ρ' son rayon de giration
 M'' la masse du pendule hormis l'induit
 G'' le centre de gravité de cette masse
 ρ'' le rayon de giration de cette même masse autour d'un axe passant par G'' et parallèle à l'axe O

Soit enfin

$$OG'' = R''$$

L'équation 3 s'écrit

$$(4) \quad M'(\rho'^2 + r^2) = \frac{G}{\omega^2} M'' R'' - M'' [\rho''^2 + (R'' - r)^2]$$

Dont la seule inconnue est ρ'

On peut en effet peser M' et M'' et l'on prend soin de donner aux différents organes qui, en dehors de l'induit, constituent le pendule : collier, raidisseurs, poids S, des formes géométriques simples permettant de déterminer en toute rigueur par le calcul ρ'' et R'' .

Remarquons cependant que si ces organes sont appliqués sur des induits de diamètres différents, R'' n'est pas constant, même si l'on prend soin d'interposer des cales légères en bois entre l'induit et le collier. Le diamètre intérieur D du collier varie toujours un peu par suite du serrage.

Le rayon r des bouts d'arbre peut d'ailleurs varier aussi d'un induit à l'autre, et le 2^d membre de l'équation (4) doit être recalculé entièrement à chaque essai.

On s'arrangera de façon que D change peu d'une expérience à l'autre et l'on donnera au collier une masse faible vis-à-vis de celle de S. Dans ces conditions ρ'' peut être considéré comme constant ; R'' s'exprimera en fonction de D et le 2^d membre de l'équation (4) se calculera rapidement.

Pour essayer un train de roues, on modifie l'armature du pendule de façon que le collier vienne s'appliquer directement sur le corps de l'essieu.

Les constantes R'' et ρ'' du pendule peuvent aussi se déterminer expérimentalement :

La position du centre de gravité G'' , c'est-à-dire la valeur de R'' , se détermine en posant l'armature horizontalement en équilibre sur un couteau. D'autre part en fixant le collier à un solide de révolution de forme simple et de peu d'inertie tel qu'une poulie pleine en bois montée sur un arbre, on obtient un nouveau pendule composé dont on connaît tous les éléments sauf ρ'' . On fait osciller et on applique l'équation (4).

Notons que pour obtenir des résultats satisfaisants dans ces diverses expériences, il est nécessaire de poser les bouts d'arbre sur des cales épaisses horizontales et bien dressées. L'amortissement est alors faible et les oscillations rigoureusement isochrones.

Si le corps mis en essai possède un certain balourd, il faut tout d'abord observer ses oscillations propres et noter leur pulsation ω^1 . Ensuite on doit appliquer le collier sans écarter le corps de sa position d'équilibre et de manière que la masse S tombe verticalement en dessous de O ;

On fait osciller à nouveau et on mesure ω .

En appliquant deux fois l'équation 4 et en négligeant certains termes sans importance tant que le balourd n'est pas particulièrement fort, on obtient l'équation rectifiée

$$(5) \quad \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega^2} M'(\rho'^2 + r^2) = \frac{g}{\omega^2} M'' R'' - M'' [\rho''^2 + (R'' - r)^2]$$

La précision de la méthode expérimentale peut s'apprécier aisément. Pour $\alpha < 0,1$ l'erreur provenant des termes négligés dans la résolution des équations et de l'ordre de 2‰. Les masses se pèsent avec toute l'exactitude voulue ; r , R'' et ρ'' s'obtiennent sans peine avec une précision de 2 à 3‰.

En observant une vingtaine d'oscillations ω se détermine à 0,5 % près.

L'influence de ces diverses erreurs sur le résultat final ressort de l'équation 4.

En notant que r est petit vis-à-vis de R et que la masse des collier

et raidisseurs est assez faible comparée à celle de S, on peut écrire en première approximation

$$M' \rho'^2 = M'' R'' \left(\frac{g}{\omega^2} - R'' \right)$$

Toute erreur sur ω ou R'' est d'autant plus grave que $\frac{g}{\omega^2}$ est plus voisin de R'' .

On s'imposera

$$\frac{g}{\omega^2 R''} = K > 1$$

ce qui donne

$$M' \rho'^2 = (K - 1) M'' R''^2$$

et montre comment il faut proportionner le moment d'inertie de la masse S autour de l'axe O au moment d'inertie de l'induit lui-même.

On obtient déjà de très bons résultats en faisant $K = 2$ et l'on arrive aisément, tous comptes faits, à une précision globale de 1 à 2 % sur ρ' .

Pour des induits pesant 500 à 900 kilog. et ayant 400 à 500 millimètres de diamètre ainsi que pour des trains de roues de 800 kilog. environ nous avons effectué des mesures satisfaisantes en utilisant une masse S de 36 kilog. excentrée de 1 mètre. L'armature pour induits avait les constantes suivantes

$$M'' = 48,7 \text{ kg. m.}$$

$$R'' = 0,458 D + 0,595 \text{ mètres}$$

$$\rho'' = 0,326 \text{ mètres.}$$

la durée d'une oscillation double était de l'ordre de 2,5 secondes.

Pour contrôler la précision de la méthode quelques essais furent effectués avec l'armature dépourvue de sa masse S. M'' se réduisait à 11 kg-m. et toutes les causes d'erreurs devaient s'accuser fortement : incertitude sur la valeur de R'' et de ρ'' , influence du baleurd, manque d'isochronisme et lenteur des oscillations. Cependant les écarts entre mesures effectuées avec et sans masse S furent généralement inférieurs à 1 %.
