Le Rattachement d'un Levé Souterrain

PAR TROIS FILS A PLOMB

PAR

M. DEHALU

Professeur à l'Université de Liége.

Le rattachement par trois fils à plomb.

Soient A, B et C (fig. 1), les projections horizontales de trois fils à plomb librement suspendus dans un puits de mine. Supposons, en outre, qu'on ait déterminé à la surface par un procédé précis les

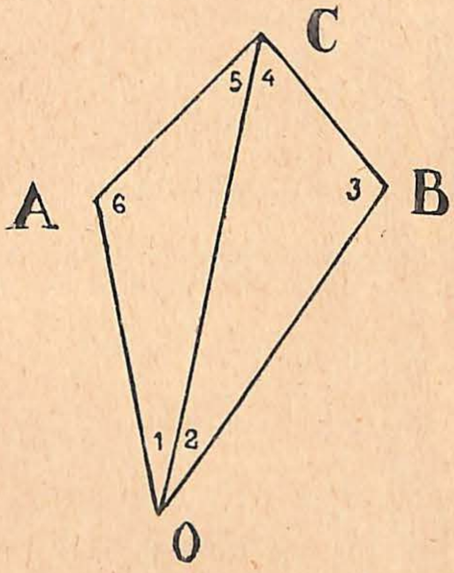

Fig. 1.

azimuts des plans verticaux AC et BC, et les distances horizontales AC$=a$ et BC$=b$. Si O est une station souterraine où l'on a mesuré, avec l'aide d'un théodolite, les angles horizontaux A O C = 1 et B O C = 2, il sera possible de fixer la position de O par rapport aux trois points A, B, C et de trouver les azimuts des directions allan de O à ces trois points.

Ce problème n'est autre en effet, que celui du relèvement sur trois points connus ou problème de Pothenot.

Rappelons-en brièvement les formules principales :

En posant

$$A\,O\,C = 1,\ B\,O\,C = 2,\ O\,B\,C = 3,\ O\,C\,B = 4,\ A\,C\,O = 5,$$
$$O\,A\,C = 6,\ 4 + 5 = C\,;$$
$$A\,C = a,\ B\,C = b,\ A\,O = s_1,\ O\,B = s_2,\ O\,C = s\,;$$

on a d'abord la relation angulaire

$$(1)\quad 3 + 6 = 360° - (1 + 2 + C) = R\,;$$

puis successivement

$$(2)\quad \frac{\sin 6}{\sin 1} = \frac{s}{a}$$

$$(3)\quad \frac{\sin 3}{\sin 2} = \frac{s}{b}\ .$$

Divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\sin (R - 6)}{\sin 6} = \frac{a \sin 2}{b \sin 1}$$

et, en développant le 1er membre de cette équation,

$$(4)\quad \operatorname{cotg} 6 = \operatorname{cotg} R + \frac{a \sin 2}{b \sin 1 \sin R}$$

On a, en outre,

$$(5)\quad 5 = 180° - (1 + 6)$$

$$(6)\quad s_1 = \frac{a \sin 5}{\sin 1} \text{ et } s_2 = \frac{b \sin 4}{\sin 2}$$

Les équations de (1) à (6) résolvent le problème.

De (4) on tire la valeur de l'angle inconnu (6) ; de (2) la distance

OC = s ; de (5) la valeur de l'angle 5 ; de (1) celle de l'angle 3 ; enfin de (6) les valeurs de s_1 et s_2.

Tous les éléments du quadrilatère sont donc déterminés.

Si, en outre, on connait les azimuts des côtés AC et BC, il sera possible d'en déduire ceux des directions OA, OC et OB.

Le problème présente un cas d'indétermination lorsque le quadrilatère est inscriptible. On a alors

$$R = 3 + 6 = 180° \qquad \sin 3 = \sin 6$$

d'où

$$\frac{a \sin 2}{b \sin 1} = 1 \qquad \cos R = -1 \qquad \operatorname{cotg} R = \infty$$

et finalement

$$\operatorname{cotg} 6 = \infty \times 0.$$

C'est une indétermination réelle. Il y a dans ce cas une infinité de quadrilatères qui répondent aux conditions du problème.

La question que nous voudrions élucider ici est la suivante : quelle précision peut-on atteindre théoriquement dans l'application de ce procédé au rattachement d'un levé de surface à un levé souterrain, et quelle est la forme du quadrilatère ABC O qu'il convient d'adopter en pratique ?

Pour entreprendre cette recherche, nous procéderons par une voie analogue à celle que nous avons indiquée dans une note précédente.

Posons

$$P = \frac{a \sin 2}{b \sin 1 \sin R}\,,$$

la formule (4) s'écrira

$$(7)\quad \operatorname{cotg} 6 = P + \operatorname{cotg} R$$

ou encore

$$6 = \operatorname{arc\,cotg} [P + \operatorname{cotg} R].$$

Différentiant cette équation, il vient :

$$\Delta (6) = - \frac{\Delta [P + \operatorname{cotg} R]}{1 + [P + \operatorname{cotg} R]^2}\,;$$

et l'on a

$$\Delta\,[P + \text{cotg}\,R] = -\frac{\Delta R}{\sin^2 R} + \frac{a \cos 2}{b \sin 1 \sin R}\,\Delta 2 + \frac{\sin 2}{b \sin 1 \sin R}\,\Delta a$$

$$- \frac{a \sin 2 \cos 1}{b \sin^2 1 \sin R}\,\Delta 1 - \frac{a \sin 2 \cos R}{b \sin 1 \sin^2 R}\,\Delta R - \frac{a \sin 2}{b^2 \sin 1 \sin R}\,\Delta b$$

ou

$$\Delta\,[P + \text{cotg}\,R] = -\frac{\Delta R}{\sin^2 R} + P\,\text{cotg}\,2\,\Delta 2 + P\,\frac{\Delta a}{a}$$

$$- P\,\text{cotg}\,1\,\Delta 1 - P\,\text{cotg}\,R\,\Delta R - P\,\frac{\Delta b}{b}.$$

Tenant compte de l'égalité

$$\Delta R = -\Delta 1 - \Delta 2 - \Delta C,$$

on trouve finalement

$$\Delta (6) = -\frac{1}{1 + [P + \text{cotg}\,R]^2}\left(\left[\frac{1}{\sin^2 R} - P\left\{\text{cotg}\,1 - \text{cotg}\,R\right\}\right]\Delta 1\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{\sin^2 R} + P\left\{\text{cotg}\,2 + \text{cotg}\,R\right\}\right]\Delta 2 + \left[\frac{1}{\sin^2 R} + P\,\text{cotg}\,R\right]\Delta C$$

$$\left. + P\,\frac{\Delta a}{a} - P\,\frac{\Delta b}{b}\right).$$

Si Δ (1), Δ (2), Δ C représentent les erreurs commises sur les angles mesurés, 1, 2 et C ; Δa et Δb les erreurs affectant les mesures linéaires a et b, l'erreur résultante Δ (6) sur l'angle inconnu 6 sera, en vertu de la théorie des moindres carrés :

$$(8)\ \Delta (6) = \frac{1}{1 + [P + \text{cotg}\,R]}\sqrt{\left[\frac{1}{\sin^2 R} - P\left\{\text{cotg}\,1 - \text{cotg}\,R\right\}\right]^2 \Delta^2 (1)}$$

$$\overline{+ \left[\frac{1}{\sin^2 R} + P\left\{\text{cotg}\,2 + \text{cotg}\,R\right\}\right]^2 \Delta^2 (2) + \left[\frac{1}{\sin^2 R} + P\,\text{cotg}\,R\right]^2 \Delta^2 C}$$

$$\overline{+ \frac{P^2\,\Delta^2 a}{a^2} + \frac{P^2\,\Delta^2 b}{b^2}}.$$

Telle est la formule sous sa forme la plus générale.

Dans le problème qui nous occupe, nous pouvons disposer à notre gré de la forme du quadrilatère ABCO ; supposons donc que l'on ait

$$a = b \qquad 1 = 2 \quad \text{et} \quad 4 = 5\ ;$$

il vient

$$R = 360° - 2\,(1 + 4),$$

$$P = \frac{1}{\sin 2\,(1 + 4)},$$

$$\Delta 1 = \Delta 2, \qquad \Delta a = \Delta b.$$

Nous limiterons notre étude aux quadrilatères de cette forme. On a, dans ce cas,

$$\frac{1}{1 + [P + \text{cotg}\,R]^2} = \cos^2 (1 + 4).$$

$$\frac{1}{\sin^2 R} - P\left\{\text{cotg}\,1 - \text{cotg}\,R\right\} = \frac{1}{2 \cos^2 (1+4)}\left[1 - \text{cotg}\,(1+4)\,\text{cotg}\,1\right],$$

$$\frac{1}{\sin^2 R} + P\left\{\text{cotg}\,1 + \text{cotg}\,R\right\} = \frac{1}{2 \cos^2 (1+4)}\left[1 + \text{cotg}\,(1+4)\,\text{cotg}\,1\right],$$

$$\frac{1}{\sin^2 R} + P\,\text{cotg}\,R = \frac{1}{2 \cos^2 (1 + 4)},$$

$$P = \frac{\text{cotg}\,(1 + 4)}{2 \cos^2 (1 + 4)},$$

et l'équation (8) se réduit à

$$(9) \quad \Delta (6) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[1 + \text{tg}^2\frac{R}{2}\,\text{cotg}^2\,1\right]\Delta^2 (1) + \frac{\Delta^2 C}{2} + \text{tg}^2\frac{R}{2}\,\frac{\Delta^2 a}{a^2}}.$$

Examinons séparément l'influence des erreurs Δ (1), Δ C et Δa sur la détermination de l'angle 6.

Si nous faisons d'abord abstraction de l'erreur Δa, la formule 9 peut s'écrire

$$(10)\ \Delta\,(6) = \sqrt{\left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{R}{2} \operatorname{cotg}^2 1\right] \frac{\Delta^2\,(1)}{2} + \frac{1}{4}\,\Delta^2\,C}.$$

Remarquons que l'angle C étant déduit d'observations faites à la surface dans le voisinage des points de suspension des fils, sa valeur est susceptible d'une détermination très précise.

Pratiquement on aura donc

$$\Delta\,C < \Delta\,(1).$$

Dès lors, il est facile de voir qu'on pourra dans (10) négliger le terme $\frac{1}{4}\,\Delta^2\,C$.

En effet, la valeur minima du premier terme de cette formule a lieu pour

$$\operatorname{tg}^2 \frac{R}{2} \operatorname{cotg}^2 1 = 0,$$

et l'on a dans ce cas

$$(11)\quad \Delta\,(6) = \sqrt{\frac{\Delta^2(1)}{2} + \frac{\Delta^2\,C}{4}}.$$

Supposons même que nous ayons

$$\Delta\,C = \Delta\,1\,;$$

de l'équation précédente nous déduirons :

$$(12)\quad \Delta\,(6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\Delta\,(1).$$

Si nous négligeons le terme en $\Delta\,C$, il vient d'autre part

$$(13)\quad \Delta_0\,(6) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\Delta\,(1).$$

La différence des valeurs obtenues en (13) et (12) représente l'erreur commise dans la dernière hypothèse. Elle s'élève à

$$\Delta\,(6) - \Delta_0\,(6) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\Delta\,(1) = 0{,}159\ \Delta\,(1).$$

Si nous supposons maintenant

$$\Delta\,C = \frac{1}{2}\,\Delta\,(1)$$

l'erreur commise en négligeant le terme en $\Delta\,C$, dans le calcul de $\Delta\,(6)$, sera

$$0{,}043\ \Delta\,(1).$$

Enfin pour

$$\Delta\,C = \frac{1}{3}\,\Delta\,(1),$$

elle ne s'élève plus qu'à

$$0{,}02\ \Delta\,(1).$$

Comme on le voit, l'influence du terme $\Delta\,C$ diminue très rapidement ; en pratique, on pourra donc le négliger et l'équation (10) deviendra

$$(14)\quad \Delta\,(6) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{R}{2} \operatorname{cotg}^2 1\right] \Delta^2\,(1)},$$

ou en remarquant que

$$\frac{R}{2} = 6,$$

$$(15)\quad \left[\frac{\Delta\,(6)}{\Delta\,(1)}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}^2 6 \operatorname{cotg}^2 1\right].$$

Posons

$$\frac{\Delta\,(6)}{\Delta\,(1)} = \pm\,k,$$

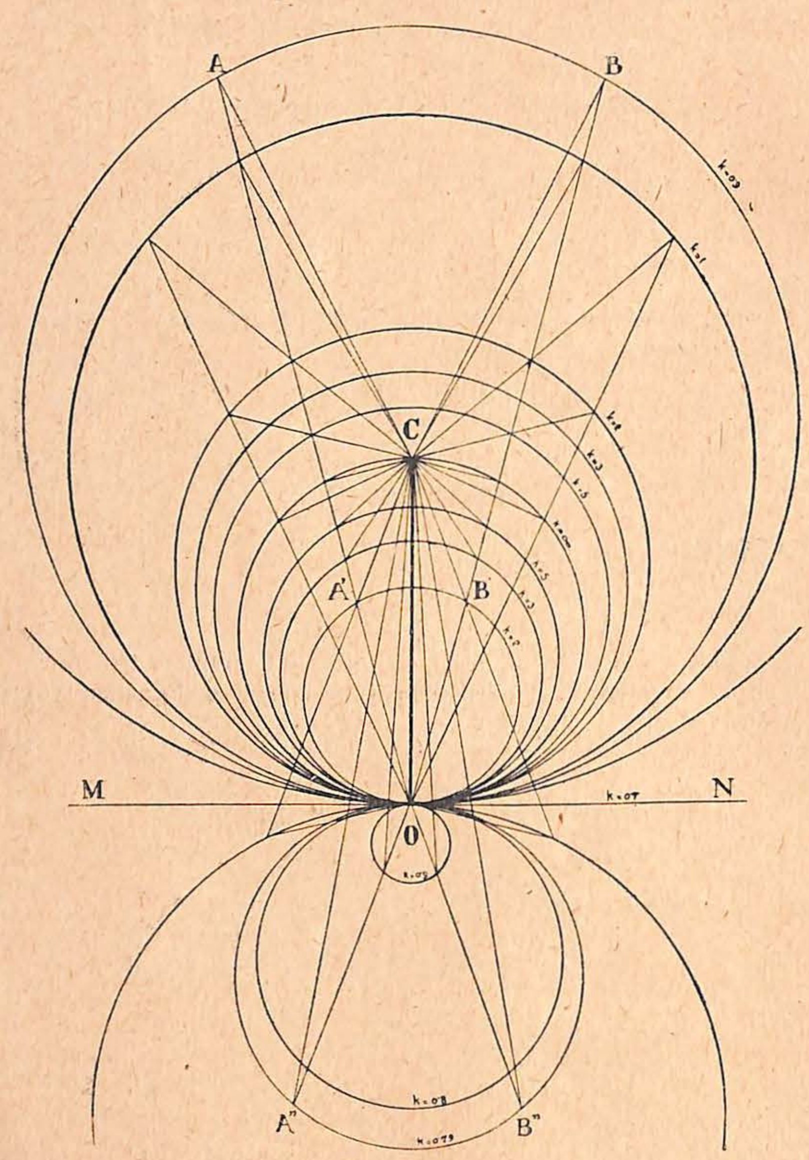

Fig. 2.

k étant le rapport de deux erreurs relatives, nous le désignerons sous le nom de *coëfficient d'erreur*. Sa valeur dépend, ainsi que nous allons le montrer de la forme même du quadrilatère.

En effet, l'équation (15) peut s'écrire

$$(16) \quad \operatorname{tg} 6 \operatorname{cotg} 1 = \pm \sqrt{2\,k^2 - 1}\,;$$

mais on a

$$(17) \quad \frac{s_1}{s} = \frac{\sin(1 + 6)}{\sin 6}.$$

Eliminons l'angle (6) entre les équations (16) et (17) ; pour cela écrivons

$$s_1 = s \left[\sin 1 \operatorname{cotg} 6 + \cos 1 \right]$$

ou

$$s_1 = s \cos 1 \left[\operatorname{tg} 1 \operatorname{cotg} 6 + 1 \right]$$

et, en tenant compte de (16),

$$(18) \quad s_1 = s \cos 1 \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2\,k^2 - 1}} \right].$$

Cette équation représente une famille de cercles.

Supposons $k = \infty$, l'équation (18) se réduit à

$$s_1 = s \cos 1$$

qui est l'équation d'un cercle de diamètre s circonscrit au quadrilatère (fig. 2).

Nous savions déjà que dans ce cas le problème était indéterminé.

Pour $k = \pm 1$, l'équation (18) fournit les deux valeurs

$$s_1 = 0 \text{ et } s_1 = 2\,s \cos 1.$$

Dans le 1[er] cas, le quadrilatère se réduit à un point et dans le second, les sommets A et B du quadrilatère, que nous avons supposé placés symétriquement par rapport à OC, se trouvent sur un cercle de diamètre $2s$ (fig. 2). Tous les quadrilatères qu'on peut ainsi former, présentent cette particularité que l'erreur Δ (6) sur l'angle inconnu (6) est de l'ordre de l'erreur Δ (1), affectant la mesure des angles en O.

Pour $k = \pm 2$, on trouve

$$s_1 = 1{,}378\, s \cos (1) \text{ et } s_1 = 0{,}622\, s \cos 1,$$

équations de deux cercles représentés fig. 2 qui sont les lieux des sommets A et B analogues à ceux que nous avons définis et qui joints à O et C donnent naissance aux quadrilatères pour lesquelles on a

$$\Delta (6) = \pm 2 \Delta (1),$$

et ainsi de suite.

Nous avons représenté (fig. 2) les cas les plus intéressants. Cette figure permet de trouver immédiatement le coëfficient d'erreur qui affecte théoriquement le calcul d'un quadrilatère dont les sommets A et B sont symétriques par rapport à OC.

Les cas les plus favorables sont ceux où les sommets A et B sont sur des circonférences dont les diamètres sont très différents de $OC = s$.

On remarquera que le coëfficient d'erreur, qui a une valeur infinie pour les quadrilatères dont les sommets A et B se trouvent sur le cercle de diamètre $OC = s$, diminue très rapidement sitôt que le diamètre des cercles, lieux des points A et B, diffère quelque peu de cette valeur.

Le coëfficient d'erreur le plus petit est

$$k = 0{,}707\ ;$$

il correspond à

$$s_1 = \infty.$$

Le lieu des sommets A et B est alors la droite MN perpendiculaire à OC.

Il nous reste à examiner l'influence d'une erreur linéaire Δ a. Elle a pour valeur

$$\Delta (6) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{R}{2} \frac{\Delta a}{a}$$

ou en secondes d'arc

$$\Delta (6) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{R}{2} \frac{\Delta a}{a} \times 206\,265''.$$

Soit

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{1000},$$

c'est-à-dire supposons que l'erreur Δa soit de 1 $^{m}/_{m}$ par mètre ; il vient

$$\Delta (6) = 103.''133 \operatorname{tg} 6.$$

L'erreur est maximum pour $6 = 90°$, ce qui a lieu lorsque le quadrilatère est inscriptible ; elle est nulle pour $6 = 0°$ ou $180°$, c'est-à-dire dans le cas où les trois fils et le point O sont situés sur le même alignement.

Cette erreur restreint donc l'utilisation de la planche (fig. 2).

Nous pouvons satisfaire largement aux exigences de la pratique en écartant tous les quadrilatères pour lesquels $\operatorname{tg} 6 > \frac{1}{3}$. Dans ce cas l'erreur à craindre du chef de l'erreur linéaire Δa, sur le calcul de l'angle 6, sera toujours inférieure à 30 secondes environ, pour la précision $\frac{1}{1000}$ admise dans les mesures linéaires.

Il convient donc que l'angle 6 soit compris entre 0 et 15 degrés ou entre 180 et 165 degrés.

Par conséquent, si l'on veut avoir la disposition la plus favorable pour les trois fils et la station O, on combinera les formes de la fig. 2 qui sont susceptibles d'une grande précision avec la condition énoncée plus haut.

Il est facile de voir, qu'en pratique, une des formes les plus avantageuses est celle représentée en ABCO ou en A'B'CO (fig. 2).

Dans un compartiment libre du puits on suspendra les trois fils à plomb de manière à réaliser une de ces deux formes; on prendra pour AB ou A'B' la valeur la plus petite possible. La station O du théodolite sera située en dehors du puits à peu de distance de C, dans le premier cas, ou de A'B' dans le second.

La disposition A''B''CO (fig. 2) est aussi excellente, mais impossible à réaliser en pratique, parce que O tombe alors dans le puits.