

Sur la valeur pratique

DU

PROBLÈME DE POTHENOT

PAR

M. DEHALU

Docteur en sciences physiques et mathématiques,
Répétiteur à l'Université de Liège,
Astronome à l'Observatoire de Cointe.

1. La discussion du problème de Pothenot (1) est toujours très malaisée quand on se place sur le terrain des applications pratiques, sur lequel nous voulons pour le moment pousser exclusivement nos investigations. S'il est, en effet, possible de discuter l'avantage que présente telle ou telle disposition géométrique du quadrilatère formé par les trois points donnés et le point dont on cherche à déterminer la position, il est plus difficile de fixer d'une manière certaine la précision qu'il faut attendre de ce procédé, même dans les cas qui paraissent géométriquement les plus avantageux.

C'est qu'en réalité la valeur des résultats dépend pour une grande part : 1° de la précision des coordonnées géodésiques des points donnés ; 2° de la précision avec laquelle sont obtenus les angles horizontaux formés par les directions qui vont de ces trois points au point dont il faut déterminer la position.

La précision dans la mesure des angles dépend surtout de l'instrument employé ; celle des coordonnées géodésiques est plus difficile à assigner.

(1) L'origine du problème des trois points remonte à une haute antiquité. Sa première application à la géodésie est due au hollandais Willebrord Snel (Snellius) (1617) ; Pothenot ne l'indiqua qu'en 1692.

En Belgique, nous avons trois sortes de points géodésiques, comme je le dirai dans un très court exposé des travaux géodésiques entrepris en Belgique, et que j'ai cru devoir rappeler pour l'intelligence du texte qui suivra. Ceux du premier ordre sont évidemment les plus précis, mais ils sont relativement peu nombreux; quant à ceux des deuxième et troisième ordres, nous manquons presque complètement d'éléments pour asseoir une opinion.

Dans ces conditions, il me paraît que la seule voie à suivre pour établir la valeur pratique du procédé de Pothenot consiste à aborder la discussion des résultats fournis par de très longues séries d'observations entreprises spécialement dans ce but; toutefois, malgré mes recherches, je n'ai trouvé trace d'un travail de l'espèce, ni en Belgique ni à l'étranger. La longueur des calculs, il est vrai, dépasse la tâche d'un calculateur isolé, et mon rôle, déjà suffisamment laborieux, se bornera à la discussion d'une série d'observations restreintes mais que je juge néanmoins suffisante pour établir la limite des erreurs auxquelles un opérateur expérimenté doit s'attendre dans l'application pratique du problème de Pothenot.

En 1904, au cours de travaux magnétiques dans les bassins miniers belges, j'eus l'occasion de relever de plusieurs stations un certain nombre de points géodésiques. Parmi ces stations, il s'en est trouvé une particulièrement intéressante pour l'objet qui nous occupe, d'où l'on pouvait découvrir huit points géodésiques. Ces huit points combinés trois à trois fournissent 56 combinaisons qui, pour le motif que je signalerai, se sont trouvées réduites à 50. Elles présentent une si grande variété de figures géométriques qu'en pratique il s'en rencontrera difficilement d'autres. C'est principalement cette raison qui m'engagea à entreprendre le calcul de toutes ces combinaisons, malgré le travail fastidieux qu'il impose, et à discuter la valeur des

résultats de chacune d'elles. Ces résultats pourront d'ailleurs paraître d'autant plus intéressants que les observations n'ont pas été recueillies en vue de cette discussion, mais uniquement pour fixer d'une manière *approchée* la position du point où la valeur des éléments magnétiques avait été déterminée.

Une autre conséquence qui se dégagera aussi de mon travail est la valeur qu'il faut attribuer au problème de Pothenot comme procédé d'orientation des plans.

En effet, en vue d'obtenir la valeur de la déclinaison magnétique, j'avais été amené à déterminer astronomiquement la position du méridien du lieu. La comparaison de ce résultat et de celui qu'on peut déduire du problème de Pothenot mérite de retenir l'attention.

2. Commençons d'abord par un court exposé des travaux géodésiques exécutés en Belgique.

Les points géodésiques qui ont servi à l'établissement de notre carte ont été répartis en trois ordres, suivant leur importance. Les points de premier ordre sont au nombre de 86 et ont formé 228 triangles, dont les angles ont été mesurés soixante fois. — 184 points du deuxième ordre ont été réunis aux points du premier ordre et ont formé 636 triangles dont les angles ont été mesurés quarante fois. — 1,830 points de troisième ordre ont été rattachés par 3,318 triangles aux points des premier et deuxième ordres, par la méthode des intersections, c'est-à-dire qu'on n'a pas stationné aux points de troisième ordre; mais les angles à la base de ces triangles ont été mesurés au moins cinq fois, et chaque sommet était commun à deux ou trois triangles. Dans le Sud du pays, on a rattaché quelques points de troisième ordre à l'aide du procédé de Pothenot.

On peut se faire une idée de la précision avec laquelle ont été fixées les positions des points du premier ordre, en

comparant les valeurs des côtés de la triangulation de premier ordre obtenues directement aux valeurs définitives déduites de la compensation : les écarts n'atteignent généralement que quelques centimètres, plus rarement 20 à 30 centimètres.

On ne compense pas habituellement les réseaux des deuxième et troisième ordres, de sorte que la même vérification ne peut se faire ici et comme, d'autre part, les observations des triangles des deuxième et troisième ordres n'ont pas été publiées, on peut difficilement assigner les limites des erreurs commises.

Le système de projection adopté pour la carte de Belgique est connu sous le nom de *développement de Bonne*. Dans ce système, le méridien central du pays se développe en ligne droite ; les autres méridiens sont des lignes transcendentes et les parallèles des arcs de cercle. La figure 1 représente une projection de la Belgique dans ce système.

Le méridien central est celui qui passe par Bruxelles et l'on a choisi pour parallèle central le parallèle du 56° grade de latitude ou $50^{\circ} 24'$ de l'ancienne division.

Le méridien de Bruxelles et la tangente du parallèle central au point O (fig. 1), situé sur le méridien central constituent les axes de la carte. A ces axes sont rapportés par des coordonnées rectilignes X et Y, les points géodésiques des trois ordres mentionnés ci-dessus.

Les X sont comptés suivant le méridien de Bruxelles, positivement dans la partie Nord et négativement dans la partie Sud ; les Y se comptent suivant la direction perpendiculaire à cette ligne positivement à l'Ouest, et négativement à l'Est.

L'origine O de ces coordonnées se trouve dans la commune de Ham-sur-Heure (Hainaut), à l'endroit dit *Hameau*. Les valeurs des coordonnées X et Y des points géodésiques ont été publiées par les soins de l'Institut cartographique

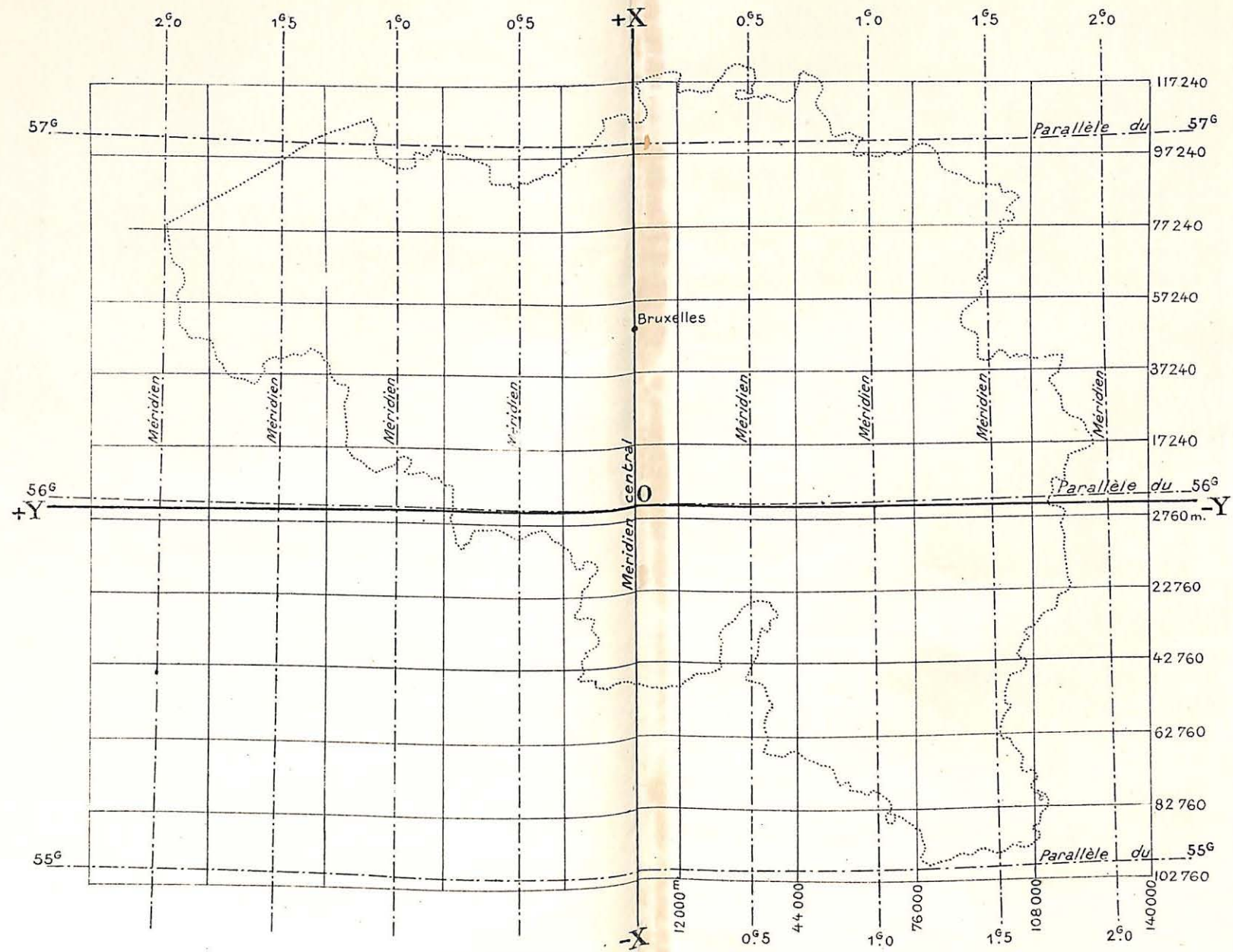


Figure 1

militaire, en 1881, et forment le tome III de la triangulation du Royaume de Belgique.

Terminons cet exposé par la division en feuilles de la carte au 40,000^e.

Le principe admis pour cette division a été le suivant (voir fig. 1) : On a mené à peu près arbitrairement, afin de ne couper aucune grande ville, une parallèle à l'axe des Y à 2,760 mètres au-dessous de cette ligne et une parallèle à l'axe des X, à 12,000 mètres à l'Ouest de cet axe. A partir de ces deux parallèles on a mené une série de lignes parallèles équidistantes de 20,000 mètres en X, et 32,000 mètres en Y, de sorte que les dimensions des feuilles au 40,000^e sont exactement 500 × 800 millimètres.

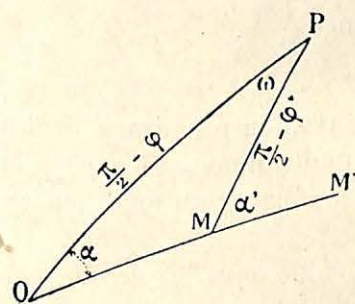
3. Examinons maintenant la solution d'un problème qui interviendra dans la question de l'orientation déduite du procédé de Pothénot.

Supposons un point M dont les coordonnées géodésiques sont x et y ; si nous désignons par α l'azimut par rapport au méridien central de la direction allant de l'origine des coordonnées au point M, nous aurons

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Proposons-nous d'obtenir cet azimut par rapport au méridien passant par le point M.

Reprenons le problème sur la sphère.



Soient P (fig. 2) le pôle Nord de la terre supposée sphérique, PO le méridien passant par Bruxelles, PM celui passant par M et OMM' un arc de grand cercle.

L'azimut de la direction OM par rapport à OP est POM,

Fig. 2.

désignons-le par α ; l'azimut de la direction OMM' par rapport à PM est PMM', désignons le par α' .

La différence $\alpha' - \alpha$ constitue ce que l'on appelle communément la convergence des deux méridiens PO et PM; elle est d'autant plus faible que les deux méridiens sont plus rapprochés.

La valeur $\alpha' - \alpha$ se calcule directement par la première analogie de Néper, appliquée au triangle sphérique OPM dans lequel on supposera connu : l'angle OPM = ω ou différence de longitude des deux points O et M; OP et MP, colatitudes des points O et M que nous désignerons par $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, φ et φ' étant les latitudes géographiques des deux points considérés. Il vient alors :

$$\cotg \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \cotg \frac{\omega}{2} \frac{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}} \quad (1)$$

Pour une étendue équivalente à celle de la Belgique, on peut négliger la différence $\frac{\varphi - \varphi'}{2}$ et réduire la formule (1) à la suivante sans qu'il en résulte d'erreur appréciable :

$$\alpha - \alpha' = \omega \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \quad (2)$$

Pour l'application à notre pays, on prendra φ' égal à 56 grades ou 50° 24', φ = la latitude du point M et ω = la longitude du même point comptée à partir du méridien de Bruxelles.

Ces deux dernières valeurs, comme nous le verrons par

un exemple que nous traiterons plus loin, se déduisent avec la plus grande facilité d'une carte de l'Etat-Major.

Pour simplifier encore les opérations, à l'aide de la formule (2), j'ai construit deux tables qu'on trouvera à la fin de cette note et qui permettent d'obtenir directement, la première, suivant la division en degrés, la seconde, suivant la division en grades, les valeurs de $\alpha - \alpha'$ pour tous les lieux de la Belgique. Son usage sera indiqué plus loin (1).

4. Ces préliminaires établis, nous pouvons aborder l'objet même de cette note. Nous commencerons par une description sommaire des opérations effectuées en campagne.

Le point d'où j'ai observé se trouve sur le territoire de la commune de Quiévrain (voir fig. 4), au S.-E. de la station du chemin de fer, à peu près à mi-chemin entre la voie du chemin de fer de Valenciennes et la route du même nom, et à 180 mètres environ à l'Ouest du chemin de fer de Quiévrain à Elouges.

Quoique l'altitude de ce point n'atteigne pas 40 mètres, on peut voir de là dix clochers, ceux de : Quiévrain, St-Crespin, Bon-Secours, Hensies, Pommerœux, Monttrœux-sur-Haine, Thulin, Dour, Montignies-sur-Roc et Andregnies.

St-Crespin se trouve sur le territoire français; les autres, à l'exception d'Andregnies, sont des points géodésiques belges. Bon-Secours est un point de premier ordre; Quiévrain et Pommerœux sont du deuxième ordre; les autres sont du troisième ordre.

L'instrument qui nous a servi à relever la position de ces points est un théodolite à lunette excentrique de

(1) Remarquons en passant une autre application de nos tables : Sur les cartes minières de nos bassins, on trace généralement les directions des deux méridiens local et central; l'angle de ces deux méridiens se trouvera directement en degrés, minutes et secondes d'arc par la table I.

20 centimètres de longueur focale; le cercle horizontal a 10 centimètres de diamètre; il est divisé en demi-degrés et donne la minute par deux verniers opposés. Mais les lectures se faisaient avec une si grande facilité qu'on évaluait sans peine les 30" à l'estime.

Bien que ce théodolite fut destiné particulièrement aux observations magnétiques, il ne différait pas des théodolites ordinaires, dans ses traits essentiels.

Les pointés des signaux comportaient deux séries: une première fois on relevait successivement la position de tous les clochers, en plaçant la lunette à droite, puis on répétait l'observation en plaçant la lunette à gauche. Les lectures se faisaient toujours au même vernier, et différaient généralement de 180°, avec parfois un très petit écart en plus ou en moins; cet écart, en effet, a rarement atteint 1', mais même lorsqu'il n'atteignait que 30", je l'ai réparti également entre les deux mesures. J'estime que les angles mesurés de la sorte ont une précision d'environ 15".

Mes observations sont rapportées dans le tableau suivant; la première colonne renferme un numéro d'ordre qui servira dans la suite à désigner le clocher auquel il se rapporte; la seconde contient le nom des clochers, et la troisième les lectures du cercle horizontal corrigées de la demi-différence des lectures lunette à droite, lunette à gauche.

J'ai cru utile de compléter ce tableau par les coordonnées X et Y, colonnes 4 et 5, tirées du tome III de la *Triangulation du Royaume de Belgique*.

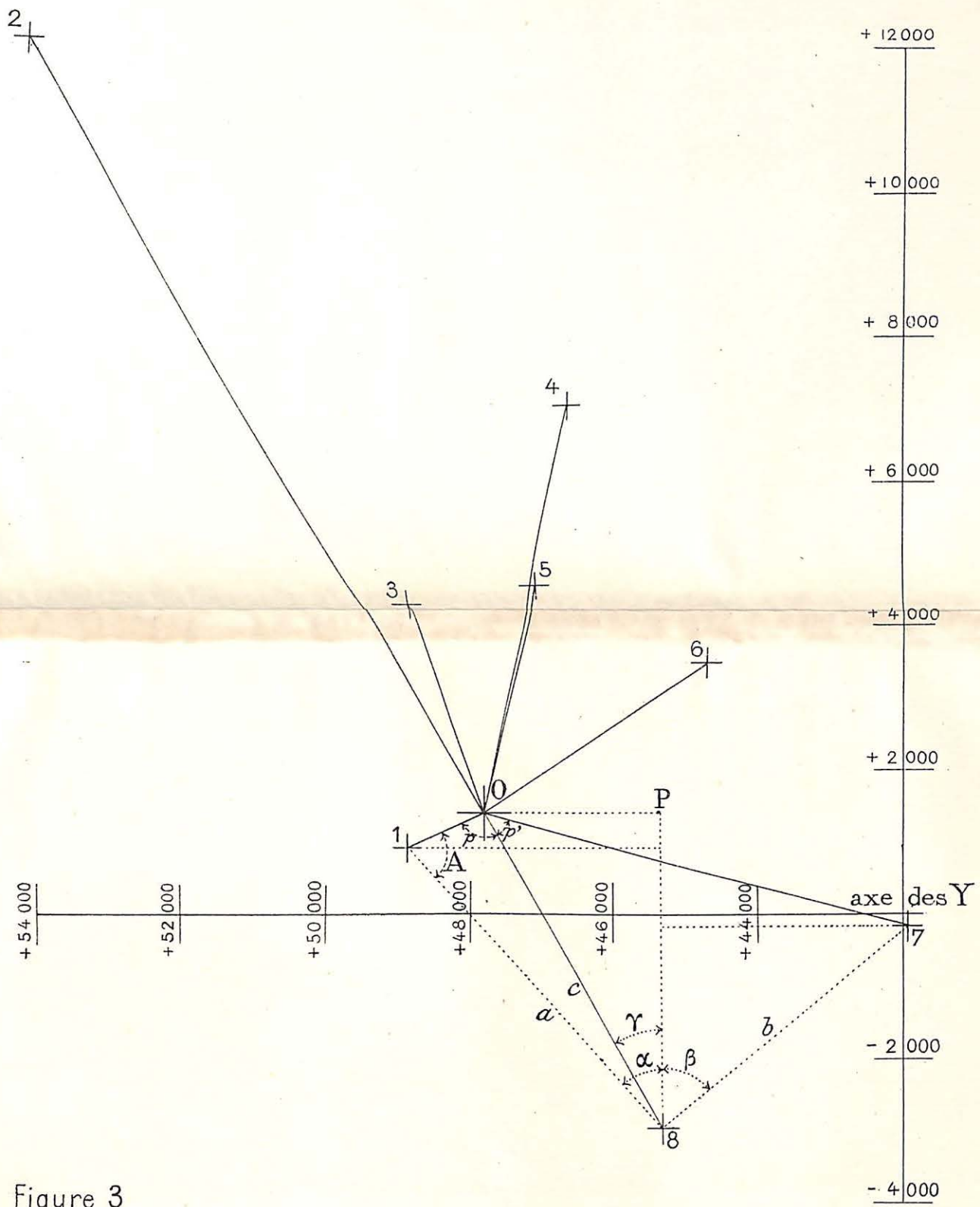


Figure 3

No 1	CLOCHERS 2	CERCLE HORIZONTAL — Lectures corrigées 3	COORDONNÉES GÉODÉSIQUES	
			X 4	Y 5
1	Quiévrain . . .	306° 33' 15"	+ 954 ^m 5	+ 48870,1
2	Bon-Secours . .	26 35	+ 11174,4	+ 54041,8
3	Hensies. . . .	39 02	+ 4310,1	+ 48869,9
4	Pommerœulx . .	70 31	+ 7082,0	+ 46659,1
5	Montrœulx-s/Haine	71 40	+ 4585,8	+ 47095,5
6	Thulin	115 01	+ 3481,1	+ 44724,1
7	Dour	164 09	— 172,3	+ 41969,0
8	Montignies-s/Roc.	209 48 15	— 2965,7	+ 45356,7

La figure 3 montre la disposition de ces huit points autour de la station que nous avons désignée par O.

5. Les observations astronomiques effectuées au même point dans le but d'obtenir, comme nous l'avons dit, la valeur de la déclinaison magnétique ont consisté dans la détermination de la position du méridien local par la méthode des distances zénithales du soleil.

Cinq valeurs indépendantes déduites des dix pointés effectués alternativement lunette à droite et lunette à gauche ont fourni la trace du méridien sur le cercle horizontal; ce sont les suivantes :

$$239^{\circ} 37' 40'' \quad 239^{\circ} 37' 26'' \quad 239^{\circ} 38' 28'' \quad 239^{\circ} 36' 45'' \\ 239^{\circ} 36' 55'' \\ \text{Moyenne : } 239^{\circ} 37' 27''.$$

L'erreur moyenne d'une détermination est $\pm 32''$ et l'erreur moyenne de la moyenne $\pm 15''$.

Les différences entre le nombre $239^{\circ} 37' 27''$ et les lectures du cercle horizontal renseignées dans le tableau qui

précède fournissent les azimuts des clochers rapportés au Nord vrai du lieu et comptés dans le sens N.-W.; ce sont :

Azimuts des clochers.

Quiévrain . . .	113° 4' 12"	Montrœulx . . .	347° 57' 27"
Bon-Secours . . .	33 2 27	Thulin . . .	304 36 27
Hensies . . .	20 35 27	Dour. . .	255 28 27
Pommerœulx . . .	349 6 27	Montignies . . .	209 49 12

6. Passons maintenant à la réduction des observations par les calculs du problème de Pothenot.

La marche que nous avons suivie est différente de celle qui a été indiquée ici même (1). Habitué depuis longtemps aux calculs logarithmiques, j'ai préféré cette voie à toute autre.

La formule dont j'ai fait usage a été empruntée à l'excellent ouvrage de H. Wilson, *Topographic Surveying* (2^e édition, New-York, John Wiley et Sons, 1905), pp. 600 et 601 (2); j'ai pensé qu'il serait intéressant d'en donner ici un exemple d'application. A cet effet, nous avons choisi la combinaison des points 1, 7, 8.

On commence par faire un croquis du quadrilatère formé par les quatre points 1, 7, 8 et O (fig. 3), ce dernier désignant le point considéré, en s'aidant pour plus de facilité d'une carte de l'Etat-Major, au 40,000^e; on joint le point O aux trois autres 1, 7 et 8, et par 8 on mène une parallèle au méridien central de la carte qui est figuré par les bords Est et Ouest du cadre de la feuille; enfin, des points O, 1 et 7, on abaisse des perpendiculaires à cette ligne.

(1) J. LIBERT, *Note sur une solution du problème de Pothenot ou des trois points*, — *Annales des Mines de Belgique*, t. XII, 3^{me} liv.

(2) Une formule analogue a été donnée dans « Die Preussische Technische Anleitung vom 16 Februar 1870, zur Ausführung der trig. und polygon. Rechnungen u. s. w. », S. 177. — Cf. W. JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde*, II Band, 5^e auflage, Stuttgart, 1897, p. 306.

Désignons les coordonnées des quatre points O, 1, 8 et 7, respectivement par xy , $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, par p et p' les deux angles mesurés 1-0-8 et 1-0-7; par α , β et γ les angles 1-8-P, 7-8-P, 0-8-P; par A l'angle 0-1-8; par a , b et c les distances 1-8, 8-7 et 0-8.

Etablissons d'abord, en nous aidant de ce croquis, les formules que nous utiliserons pour le calcul. Comme elles sont tout-à-fait élémentaires, nous nous dispenserons de longues explications.

$$(1) \quad y' - y'' = (x' - x'') \operatorname{tg} \alpha \quad y' - y'' = (x''' - x'') \operatorname{tg} \beta.$$

$$(2) \quad y' - y'' = a \sin \alpha \quad y'' - y''' = b \sin \beta.$$

Posons :

$$(3) \quad R = 360^\circ - (p + p' + \alpha + \beta);$$

il vient :

$$\frac{a \sin p'}{b \sin p} = \frac{\sin (R - A)}{\sin A}.$$

Mais

$$\frac{\sin (R - A)}{\sin A} = \sin R \operatorname{cotg} A - \cos R = \cos R [\operatorname{tg} R \operatorname{cotg} A - 1],$$

finalement

$$(4) \quad \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} R \left[1 + \frac{a \sin p'}{b \sin p \cos R} \right].$$

On a aussi

$$(5) \quad \gamma = \alpha + p + A - 180$$

$$(6) \quad \frac{c}{\sin A} = \frac{a}{\sin p}$$

$$(7) \quad Y - y'' = c \sin \gamma \quad X - x'' = c \cos \gamma$$

Les formules 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 résolvent le problème; mais quelques remarques sont nécessaires :

1. Si $R = 180^\circ$ ou à peu près, la solution est impossible;
2. Le logarithme de l'expression $\frac{a \sin p'}{b \sin p \cos R}$ est égal au logarithme d'un nombre qui prend le signe de $\cos R$;
3. Ajouter algébriquement + 1 au nombre précédent;
4. Indiquer le signe de l'expression $1 + \frac{a \sin p'}{b \sin p \cos R}$ et de $\cotg R$;
5. Si $R < 90^\circ$, $\cos R$ est + et $\cotg R$ est +.
 Si $R < 270^\circ$ et $R > 180^\circ$, $\cos R$ est - et $\cotg R$ est +.
 Si $R < 180^\circ$ et $R > 90^\circ$, $\cos R$ est - et $\cotg R$ est -.
 Si $R < 360^\circ$ et $R > 270^\circ$, $\cos R$ est + et $\cotg R$ est -.

On disposera les calculs comme suit:

$y' + 48870.1$	$x' + 954.5$	$y'' + 45356.7$	$x''' - 172.3$
$y'' + 45356.7$	$x'' - 2965.7$	$y''' + 41969.0$	$x'' - 2965.7$
<u>$y' - y''$ 3513.4</u>	<u>$x' - x''$ 3920.2</u>	<u>$y'' - y'''$ 3387.7</u>	<u>$x''' - x''$ 2793.4</u>
$\lg (y' - y'')$ 3.545 73	$\lg (y'' - y''')$ 3.529 90	p 96° 45' 00"	
$\lg (x' - x'')$ 3.593 31	$\lg (x''' - x'')$ 3.446 13	p' 45° 39' 15"	
$\lg \tg \alpha$ 9.952 42	$\lg \tg \beta$ 0.083 77	α 41° 52' 5"	
		β 50° 29' 30"	
		<u>Somme</u> 234° 45' 50"	
		360°	
		<u>R</u> 125° 14' 10"	

	$\lg \sin p'$	9.854 39	
	$\lg \sin \beta$	8.887 36	
	$\lg (y' - y'')$	3.545 73	3.545 73
	$c^t \lg \sin \alpha$	0.175 60	0.175 60
	$c^t \lg \sin p$	0.003 02	0.003 02
	$c^t \lg (y'' - y''')$	6.470 10	9.974 82 $\lg \sin A$
$\lg \cotg R$ 9.849 03 <i>n</i>	$c^t \lg \cos R$	0.238 86 <i>n</i>	<u>3.699 17</u>
$\lg \Sigma$ 9.695 87 <i>n</i>			
	$\lg \frac{a \sin p'}{b \sin p \cos R}$	0.175 06 <i>n</i>	9.689 57 $\lg \sin \gamma$
$\lg \cotg A$ 9.544.90			
	$\frac{a \sin p'}{b \sin p' \cos R}$	- 1.49644	9.940 57 $\lg \cos \gamma$
A 70° 40' 32"		+ 1	3.388 74 $\lg (Y - y'')$
α 41 52 5		Σ - 0.49644	3.639 74 $\lg (X - x'')$
p 96 45 00			
<u>Somme</u> 209° 17' 37"	$Y - y''$	+ 2447.6	+ 4362.5 $X - x''$
180	y''	+ 45356.7	- 2965.7 x''
	<u>Y</u>	<u>+ 47804.3</u>	<u>+ 1396.8 X</u>
γ 29° 17' 37"			

7. Voyons maintenant comment il est possible de déduire de ces résultats l'orientation par rapport au Nord vrai du lieu considéré.

L'angle $\gamma = 29^\circ 17' 37''$ qu'on vient de calculer est l'azimut, par rapport au méridien de Bruxelles, de la direction O-S, cet azimut étant compté du Sud vers l'Est; si, au contraire, nous l'estimons du Nord vers l'Ouest, nous aurons :

$$180^\circ + 29^\circ 17' 37'' = 209^\circ 17' 37''.$$

Pour connaître la valeur de cet azimut par rapport au Nord vrai du lieu, il suffit de retrancher du nombre obtenu la convergence des deux méridiens, ceux de Bruxelles et du lieu d'observation.

Cet angle que, nous désignerons sous le nom d'azimut géodésique se calcule aisément; on le trouve directement par les tables que nous avons mentionnées n° 3. Mais il faut connaître préalablement la position géographique du point de station. Celle-ci s'obtient en reportant ce point sur une carte au 40,000°.

Voici le détail de cette construction.

Le point à construire se trouve dans l'angle Sud-Ouest de la feuille au 40,000°, n° 45 (Mons), dont un fragment est reproduit figure 4.

Le sommet Sud-Ouest du cadre de cette feuille a pour coordonnées :

$$X_0 = 2750 \text{ mètres S.} \quad Y_0 = 52000 \text{ mètres O.}$$

d'après les indications inscrites sur la carte même.

En appliquant la convention des signes, donnée n° 2, il vient :

$$X_0 = -2760 \text{ mètres.} \quad Y_0 = +52000 \text{ mètres.}$$

Les coordonnées du point à construire sont :

$$X = +1396^{\text{m}8}. \quad Y = +47804^{\text{m}3}.$$

On fait les différences algébriques :

$$X - X_0 = 4156^{\text{m}8} \text{ et } Y_0 - Y = 4195^{\text{m}7}.$$

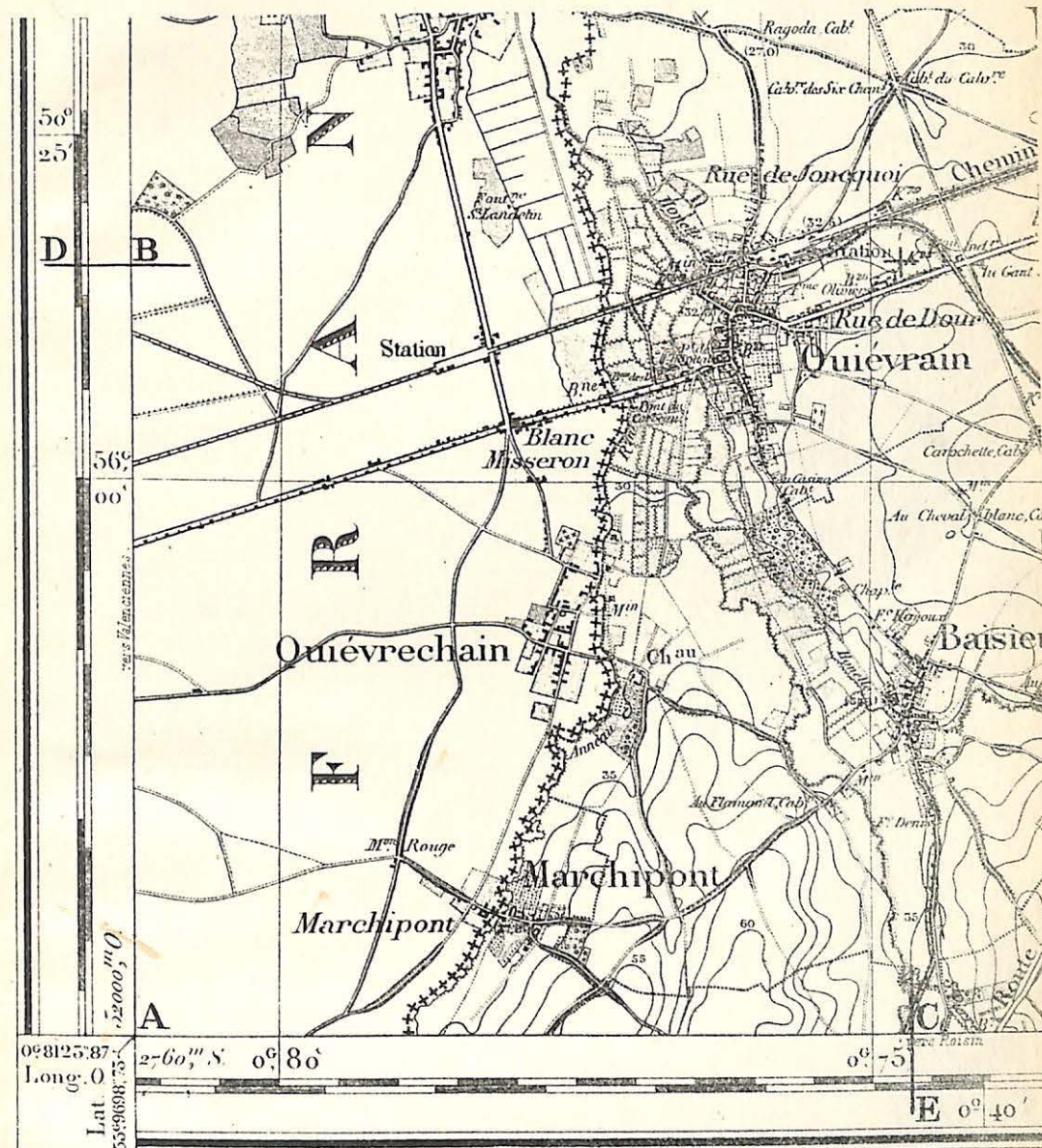
Ces distances représentent à l'échelle du 40,000° :

$$103,9 \text{ et } 104,9 \text{ millimètres.}$$

On porte ces valeurs sur le cadre de la feuille, la première suivant AB (fig. 4), et la deuxième en AC.

Deux perpendiculaires élevées, l'une en B, l'autre en C, permettent par leur intersection d'obtenir la position du point cherché.

Prolongeons ces perpendiculaires jusqu'en D et E, et évaluons les positions D et E sur les échelles graduées parallèles au cadre de la feuille.



Levé et nivelé en 1866. — Rédigé et gravé en 1873. — Équidistance de 5 mètres

(Fig. 4)

Nous avons trouvé sur l'échelle en divisions sexagésimales :

$$\text{pour D} \dots 50^{\circ} 24' 30'' + \frac{30'' \times 5^{\text{mm}}}{23^{\text{mm}2}} = 50^{\circ} 24' 36''5$$

$$\text{pour E} \dots 0^{\circ} 40' + \frac{30'' \times 9^{\text{mm}5}}{14^{\text{mm}6}} = 0^{\circ} 40' 19''5$$

et sur l'échelle en divisions centésimales :

$$\text{pour D} \dots 56^{\text{c}}01 + \frac{0^{\text{c}}005 \times 3^{\text{mm}8}}{12^{\text{mm}3}} = 56^{\text{c}} 01' 15''$$

$$\text{pour E} \dots 0^{\text{c}}745 + \frac{0^{\text{c}}005 \times 2^{\text{mm}2}}{7^{\text{mm}9}} = 0^{\text{c}} 74' 64''$$

Si l'on transformait ces derniers nombres en degrés, minutes et secondes de l'ancienne division, on trouverait $50^{\circ} 24' 37''.2$ et $0^{\circ} 40' 18''.3$, ce qui montre l'accord des deux interpolations graphiques.

Ces valeurs obtenues, on trouvera facilement la convergence des méridiens :

1° En faisant usage d'une des formules 1 ou 2 du n° 3, on trouve, en prenant $\omega = 0^{\circ} 40' 18''$, $\varphi = 50^{\circ} 24' 37''$ et $\varphi' = 50^{\circ} 24'$:

$$\alpha - \alpha' = 31' 3''.4;$$

2° Par l'emploi de la table I :

Dans la colonne verticale d'argument $\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 50^{\circ}$, on trouve :

$$\text{pour } \omega = 39' \dots 29' 52''.5$$

$$\text{pour } \omega = 42' \dots 32' 10''.4$$

$$\text{Différence pour } 3' \dots 2' 17''.9 \text{ ou } 2'.3.$$

$$\text{Différence pour } 1'.18'' \text{ soit } 1'.3 \frac{2'.3 \times 1'.3}{3} = 0'.997 \text{ ou } 59''.8$$

Dans la colonne verticale d'argument $\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 50^{\circ}30'$,

on trouve de même :

$$\begin{array}{l} \text{pour } \omega = 39' \quad . \quad . \quad . \quad 30' 5''.6 \\ \text{pour } \omega = 42' \quad . \quad . \quad . \quad 32' 24''.5 \end{array}$$

nombres qui diffèrent des précédents respectivement de $13''.1$ et $14''.1$, soit en moyenne de $13''.6$. Cette valeur représente d'une manière suffisamment précise la variation de $\alpha - \alpha'$ pour $30'$ de changement en latitude dans la partie de la table considérée. On aura donc :

$$\begin{array}{l} \text{Variation pour } 30' \text{ de latitude.} \quad 13''.6 \\ \text{Variation pour } 24'19'' \text{ ou } 24'.3. \quad \frac{13''.6 \times 24'.3}{30} = 10''.9. \end{array}$$

Les nombres $59''.8$ et $10''.9$ qui représentent les valeurs des interpolations en longitude et latitude sont additives; il vient donc :

$$\alpha - \alpha' = 29' 52''.5 + 59''.8 + 10''.9 = 31' 3''.2,$$

valeur bien proche de la précédente ($31' 3''.4$).

Remarquons qu'une interpolation aussi rigoureuse ne sera pas toujours nécessaire; elle dépendra surtout de la précision que l'on veut obtenir;

3° Une construction graphique effectuée sur la carte permet aussi de trouver une valeur approchée de la convergence des méridiens. Elle repose sur le principe suivant :

Supposons un méridien MN (fig. 5) rencontrant en M et N, au Nord et au Sud, le cadre ABCD d'une feuille de la carte au $40,000^{\circ}$; si

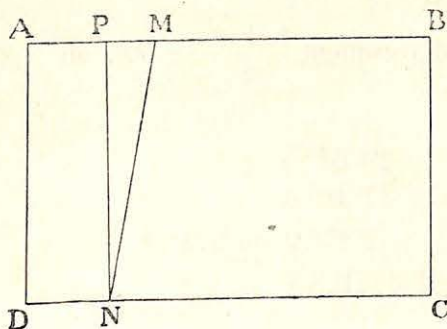


FIG. 5.

l'on mène du point N une parallèle NP à AD, dans le triangle PMN, on aura :

$$PM = AM - DN; \quad PN = 500 \text{ millimètres.}$$

$$PNM = \text{convergence des méridiens.}$$

On a, en outre,

$$\text{tg } PNM = \frac{PM}{PN} = \frac{2(AM - DN)}{1,000}.$$

Nous avons appliqué ce procédé à l'exemple traité précédemment en prenant pour MN le méridien de $0^{\circ}75'$ qui figure sur la feuille n° 45 et le plus rapproché du point de notre station; nous avons trouvé :

$$AM = 103.5 \text{ millimètres.}$$

$$DN = 99.0 \quad -$$

$$\text{Différence.} \quad 4.5 \text{ millimètres.}$$

Formule :

$$9^{\text{mm}} = 1,000^{\text{mm}} \text{tg } (\alpha - \alpha'); \quad \text{d'où } \alpha - \alpha' = 30' 56''.$$

L'accord de cette dernière valeur avec les précédentes est satisfaisant; mais une restriction s'impose cependant.

La convergence des méridiens est fonction non seulement de la longitude, mais encore de la latitude, de sorte que l'angle $\alpha - \alpha'$, évalué sur la carte, devrait varier suivant la position en latitude des feuilles qui contiennent le méridien dont on veut calculer la convergence avec celui de Bruxelles. Mais cette différence est trop faible pour être appréciée ici (1).

(1) Autrement dit : Dans le système de projection de la carte de Belgique, les méridiens, si on en excepte celui de Bruxelles, sont des lignes transcendentes et la direction du Nord vrai en un point quelconque d'une de ces lignes est donnée par la tangente menée en ce point. Or, l'angle de deux tangentes menées aux extrémités N. et S. d'un méridien situé aux confins E. ou W. de la Belgique n'atteint guère plus d'une minute d'arc.

Nous pouvons d'ailleurs nous rendre compte aisément de la précision du procédé graphique. La tangente de $1''$ vaut 0.002 millimètre pour un rayon de 500 millimètres, soit 0.2 millimètre pour une tangente de $100''$. Il faut donc évaluer la valeur $AM - DN$ à 0.1 millimètre près pour avoir une précision un peu supérieure à $1'$.

La concordance de la valeur obtenue par le procédé graphique avec les précédentes est donc purement accidentelle.

Si nous adoptons comme valeur de $\alpha - \alpha'$ le nombre $31' 3''$, il suffira d'ajouter ce nombre à l'azimut $209^\circ 17' 37''$ pour avoir la valeur de cet azimut rapporté au nord vrai du lieu. On trouve ainsi :

$$209^\circ 48' 40''.$$

L'observation astronomique avait donné (n° 5) :

$$209^\circ 49' 12'',$$

soit une différence de $32''$ seulement.

Cette différence serait évidemment la même pour les directions O-1 et O-7.

Il nous suffira dans ce qui suit d'indiquer la valeur de cette différence pour une des directions allant du point considéré aux points donnés dans chacun des exemples calculés.

8. Les calculs qui précèdent ont été appliqués à toutes les combinaisons trois à trois, pratiquement admissibles, des huit points donnés. Théoriquement, le nombre de ces combinaisons est égal à 56, mais il faut en exclure les cas d'impossibilité, qui sont :

1° Les trois points donnés et le point cherché forment un quadrilatère inscriptible ;

2° Les angles mesurés sont très petits.

Aucun cas de la première espèce ne s'est présenté.

Cependant la combinaison des points 6, 7, 8 et O a fourni un quadrilatère presque inscriptible ($R = 172^\circ 43' 31''$) ; mais les résultats obtenus ont cadré suffisamment avec les autres pour que nous n'ayons pas cru devoir les écarter.

Il n'en fut pas de même en ce qui concerne la seconde espèce d'impossibilité. L'angle des clochers de Pomme-rœulx et de Montrœulx atteint $1^\circ 9'$ seulement ; nous avons donc rejeté toutes les combinaisons où ces deux points figurent à la fois.

Il nous est resté finalement 50 combinaisons qui, comme on peut s'en rendre compte par la figure 3, ont présenté les formes les plus diverses.

Les résultats de nos calculs sont consignés dans le tableau suivant. Dans la première colonne, on a indiqué la combinaison effectuée par trois chiffres, chacun d'eux désignant un clocher, conformément à la classification renseignée au tableau du n° 4 ; dans les deuxième et troisième, les coordonnées X et Y calculées ; enfin dans la quatrième, les différences algébriques entre les valeurs des azimuts astronomiques (n° 5) et géodésiques (n° 7).

TABLEAU
des résultats des combinaisons trois à trois des points donnés.

COMBINAISON	X	Y	ÉCART D'ORIENTATION
1-2-3 . . .	1397.4	47804.3	- 0' 51"
1-2-4 . . .	5.4	7.7	+ 0 18
1-2-5 . . .	5.9	6.4	- 0 16
1-2-6 . . .	3.9	5.8	+ 1 14
1-2-7 . . .	5.9	6.3	- 0 6
1-2-8 . . .	6.7	5.6	- 0 22
1-3-4 . . .	7.3	4.5	- 1 2
1-3-5 . . .	7.9	4.0	- 1 49
1-3-6 . . .	6.3	5.2	+ 0 37
1-3-7 . . .	6.6	5.4	+ 0 16
1-3-8 . . .	6.0	6.5	+ 0 36
1-4-6 . . .	4.6	8.5	+ 0 56
1-4-7 . . .	6.4	6.2	- 0 14
1-4-8 . . .	6.9	5.0	- 0 51
1-5-6 . . .	5.7	7.0	+ 0 44
1-5-7 . . .	6.3	6.0	- 0 6
1-5-8 . . .	6.6	5.5	- 0 31
1-6-7 . . .	6.8	4.6	+ 0 26
1-6-8 . . .	6.8	4.6	+ 0 26
1-7-8 . . .	6.8	4.3	+ 0 32
2-3-4 . . .	7.8	5.0	- 0 44
2-3-5 . . .	7.8	5.0	- 0 44
2-3-6 . . .	6.0	4.5	- 0 34
2-3-7 . . .	1392.4	47803.6	- 0 18

COMBINAISON	X	Y	ÉCART D'ORIENTATION
2-3-8 . . .	1393.4	47803.7	- 0' 20"
2-4-6 . . .	7.2	5.6	- 0 28
2-4-7 . . .	6.3	6.3	- 0 8
2-4-8 . . .	7.6	5.3	- 0 37
2-5-6 . . .	5.1	6.6	+ 0 5
2-5-7 . . .	6.0	6.1	- 0 10
2-5-8 . . .	6.7	5.6	- 0 22
2-6-7 . . .	5.5	5.1	- 0 22
2-6-8 . . .	5.5	4.9	- 0 22
2-7-8 . . .	5.5	4.9	- 0 22
3-4-6 . . .	4.1	1.0	- 3 32
3-4-7 . . .	2.5	9.9	+ 2 42
3-4-8 . . .	8.2	5.4	- 0 29
3-5-6 . . .	8.0	9.5	+ 3 56
3-5-7 . . .	8.0	6.9	+ 1 13
3-5-8 . . .	7.9	4.0	- 1 46
3-6-7 . . .	5.6	4.9	- 0 19
3-6-8 . . .	5.8	5.0	- 0 6
3-7-8 . . .	6.1	5.0	- 0 3
4-6-7 . . .	4.5	5.3	- 0 57
4-6-8 . . .	4.5	5.5	- 0 52
4-7-8 . . .	5.3	4.6	- 0 56
5-6-7 . . .	4.7	5.8	- 0 34
5-6-8 . . .	4.2	5.5	- 1 8
5-7-8 . . .	5.3	4.2	- 1 9
6-7-8 . . .	1395.4	47805.0	- 0 25
Moyennes	1395.98	47805.46	- 0' 11"9

Les écarts de la moyenne à chacune des valeurs particulières ont permis de calculer les erreurs moyennes. On a trouvé ainsi que l'erreur moyenne d'une observation isolée est en X, $\pm 1^m39$; en Y, $\pm 1^m40$; en azimut, $\pm 1' 1''$. Les plus grands écarts de la moyenne ont atteint : en X, $+ 2^m2$ et $- 3^m6$; en Y, $\pm 4^m4$; en azimut, $- 3' 20''$ et $+ 4' 8''$.

Si l'erreur moyenne d'une observation peut paraître déjà très satisfaisante, il n'en est pas moins vrai qu'on s'exposerait, dans certains cas que rien ne permet de prévoir, à commettre des erreurs inadmissibles dans notre système de cartographie minière.

9. Mais est-il un opérateur vraiment digne de ce nom qui accepterait de fixer la position d'un point par trois points donnés seulement? Evidemment non. Un contrôle est ici absolument nécessaire, d'autant plus qu'il m'est arrivé de confondre, par suite de fausses indications, un clocher avec un autre, de viser un clocher nouveau qui avait été édifié à proximité de l'ancien, disparu, et même de commettre des erreurs dans le calcul.

Remarquons d'abord que depuis la publication des valeurs des coordonnées géodésiques, — nous avons dit qu'elle remontait à 1880, — nombre de clochers choisis comme points géodésiques ont été déplacés et leurs coordonnées modifiées n'ont pas été publiées. Mais on peut en obtenir les valeurs en s'adressant à l'Institut cartographique militaire de la Cambre, si toutefois le nouveau point a été rattaché à la triangulation générale du Royaume. D'ailleurs, nous croyons qu'une information détaillée sur les clochers visés, puisée à la source que nous venons d'indiquer, s'impose avant tout, si l'on veut s'éviter l'ennui de longs tâtonnements.

Si avec quelques précautions, il est possible de se garder des deux premières sources d'erreurs que nous avons signa-

lées, il me paraît plus difficile de rendre apparente une faute commise dans le calcul, à moins qu'en choisissant un quatrième point géodésique qui, combiné avec les trois autres, fournirait plusieurs valeurs des coordonnées du point cherché, l'accord entre les diverses valeurs obtenues devant se faire dans les limites fixées précédemment, si aucune erreur n'a été commise.

Le choix d'au moins un quatrième point s'impose donc comme une nécessité inéluctable; dans ces conditions, on peut se demander quelle précision on peut attendre de la moyenne des quatre valeurs particulières obtenues en combinant les quatre points donnés trois à trois.

Une discussion analogue à celle du n° 8 nous permettra de répondre à cette question.

Si l'on combinait les huit points donnés quatre à quatre, on devrait obtenir 70 combinaisons; mais il faut nécessairement écarter toutes celles qui renferment à la fois les points 4 et 5 (n° 8), ce qui réduit à 55 le nombre des combinaisons admissibles. Pour chacune de celles-ci, nous avons d'abord formé les combinaisons des quatre points trois à trois, ce qui nous a donné quatre solutions particulières dont nous prenons la moyenne.

Par exemple, la combinaison 1-2-3-4 donne :

	X	Y	AZIMUT
1—2—3	1397.4	47804.3	— 0' 51"
1—2—4	5.4	7.7	+ 0 18
1—3—4	7.3	4.5	— 1 2
2—3—4	7.8	5.0	— 0 44
Moyennes	1397.0	47805.4	— 0' 35"

Les moyennes ainsi calculées pour chacun des 55 groupes précités sont renseignées dans le tableau suivant :

TABLEAU
des résultats des combinaisons quatre à quatre des points donnés.

COMBINAISON	X	Y	ÉCART D'ORIENTATION
1-2-3-4	1397.0	47805.4	- 0' 35"
1-2-3-5	7.3	4.9	- 0 55
1-2-3-6	5.9	5.0	+ 0 7
1-2-3-7	5.6	4.9	- 0 15
1-2-3-8	5.9	5.0	- 0 14
1-2-4-6	5.3	6.9	+ 0 30
1-2-4-7	6.0	6.6	- 0 3
1-2-4-8	6.7	5.9	- 0 23
1-2-5-6	5.2	6.5	+ 0 27
1-2-5-7	6.0	6.2	- 0 10
1-2-5-8	6.5	5.8	- 0 23
1-2-6-7	5.5	5.4	+ 0 18
1-2-6-8	5.7	5.2	+ 0 14
1-2-7-8	6.2	5.3	- 0 5
1-3-4-6	5.6	4.8	- 0 45
1-3-4-7	5.7	6.5	+ 0 26
1-3-4-8	7.1	5.4	- 0 27
1-3-5-6	7.0	6.4	+ 0 52
1-3-5-7	7.2	5.6	- 0 7
1-3-5-8	7.1	5.0	- 0 53
1-3-6-7	6.3	5.0	+ 0 15
1-3-6-8	6.2	5.3	+ 0 23
1-3-7-8	6.4	5.3	+ 0 20
1-4-6-7	5.6	6.2	+ 0 3
1-4-6-8	5.7	5.9	- 0 5
1-4-7-8	6.4	5.0	- 0 22
1-5-6-7	1395.9	47805.9	+ 0' 8"

COMBINAISON	X	Y	ÉCART D'ORIENTATION
1-5-6-8	1395.8	47805.7	- 0' 7"
1-5-7-8	6.2	5.0	- 0 19
1-6-7-8	6.5	4.6	+ 0 15
2-3-4-6	6.3	4.0	- 1 20
2-3-4-7	4.8	6.2	+ 0 23
2-3-4-8	6.8	4.9	- 0 33
2-3-5-6	6.7	6.4	+ 0 41
2-3-5-7	6.1	5.4	± 0 00
2-3-5-8	6.5	4.6	- 0 48
2-3-6-7	4.9	4.5	- 0 23
2-3-6-8	5.2	4.5	- 0 21
2-3-7-8	4.4	4.3	- 0 16
2-4-6-7	5.9	5.6	- 0 29
2-4-6-8	6.2	5.3	- 0 35
2-4-7-8	6.2	5.3	- 0 31
2-5-6-7	5.3	5.9	- 0 15
2-5-6-8	5.4	5.7	- 0 27
2-5-7-8	4.9	4.2	- 0 31
2-6-7-8	5.5	5.0	- 0 23
3-4-6-7	4.2	5.3	- 0 32
3-4-6-8	5.7	4.2	- 0 15
3-4-7-8	5.5	6.2	+ 0 19
3-5-6-7	6.6	6.8	+ 1 4
3-5-6-8	6.5	6.0	- 0 1
3-5-7-8	6.8	5.0	- 0 26
3-6-7-8	5.7	5.0	- 0 13
4-6-7-8	4.9	5.1	- 0 48
5-6-7-8	1394.9	47805.1	- 0' 49"
Moyennes	1395.95	47805.40	- 0' 10"2

Comme précédemment, nous avons établi la précision des mesures et nous trouvons que l'erreur moyenne d'une détermination en X est $\pm 0^m72$; en Y, $\pm 0^m70$; en azimut, $\pm 28''.2$. Les plus grands écarts à la moyenne sont : en X, $\pm 1^m4$, en Y, $+ 1^m3$ et $- 1^m8$; en azimut, $\pm 1' 10''$.

Une telle précision peut suffire dans bien des cas.

10. Ces résultats auraient pu d'ailleurs être déduits directement des erreurs moyennes calculées pour les combinaisons trois à trois (n° 8), en appliquant un simple principe du calcul des probabilités. On sait, en effet, que la précision croît comme la racine carrée du nombre des observations.

On trouve ainsi que :

$$0^m72 \sqrt{4} = 1^m44, \quad 0^m70 \sqrt{4} = 1^m40 \quad \text{et} \quad 28''.2 \sqrt{4} = 56''.4$$

Ces trois valeurs sont très proches de celles que nous avons déduites de la discussion de l'ensemble des observations comme erreurs moyennes en X, en Y et en azimut, pour une simple combinaison de trois points. Les conclusions que nous avons tirées de l'application du calcul des probabilités au tableau du paragraphe n° 9 constituent donc, si nous les rapprochons de celles déduites du tableau n° 8 par une voie identique, une justification du principe que nous avons énoncé sur la précision des observations.

11. Ajoutons un mot pour terminer.

Nos bassins miniers comptent un assez grand nombre de points géodésiques; de sorte qu'il sera toujours possible de faire choix de quatre points pour fixer la position d'un point remarquable, puits ou borne de concession. Mais supposons cependant qu'on soit réduit à n'avoir que trois points; dès lors, on perdrait les avantages du contrôle fourni par le quatrième point. Je pense que dans cette

alternative, il serait tout indiqué de procéder à une détermination astronomique du méridien. Si nous examinons, en effet, le tableau du paragraphe n° 8, nous voyons que les plus forts écarts renseignés dans la quatrième colonne accompagnent les valeurs les plus discordantes en X et Y comparativement à la moyenne. L'observation astronomique constituerait donc ici un excellent critérium pour les valeurs en X et Y et suppléerait ainsi, dans une certaine mesure, à l'absence d'un quatrième point géodésique. Or, pour un observateur exercé, la détermination astronomique du méridien par les distances zénithales du soleil, comme elle se trouve renseignée au paragraphe n° 5, ne demande guère plus de dix minutes d'observation et les calculs de réduction ne sont ni plus longs, ni plus compliqués que ceux du problème de Pothenot.

TABLE I.

LONGITUDE E ou W DE BRUXELLES	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 50^{\circ}$	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 50^{\circ} 30''$	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 51^{\circ}$
0° 00' . . .	00' 00".0	00' 00".0	00' 00".0
03 . . .	02 17.9	02 18.9	02 19.9
06 . . .	04 35.8	04 37.8	04 39.8
09 . . .	06 53.7	06 56.7	06 59.7
12 . . .	09 11.6	09 15.6	09 19.5
15 . . .	11 29.5	11 34.5	11 39.4
18 . . .	13 47.3	13 53.4	13 59.3
21 . . .	16 05.2	16 12.3	16 19.2
24 . . .	18 23.1	18 31.2	18 39.1
27 . . .	20 41.0	20 50.1	20 59.0
30 . . .	22 58.9	23 08.9	23 18.8
33 . . .	25 16.8	25 27.8	25 38.7
36 . . .	27 34.6	27 46.7	27 58.6
39 . . .	29 52.5	30 05.6	30 18.5
42 . . .	32 10.4	32 24.5	32 38.4
45 . . .	34 28.3	34 43.4	34 58.3
48 . . .	36 46.2	37 02.3	37 18.1
51 . . .	39 04.1	39 21.2	39 38.0
54 . . .	41 22.0	41 40.1	41 57.9
57 . . .	43 39.9	43 59.0	44 17.8
1 00 . . .	45 57.7	46 17.9	46 37.7
03 . . .	48 15.6	48 36.8	48 57.6
06 . . .	50 33.5	50 55.6	51 17.6
09 . . .	52 51.4	53 14.5	53 37.5
12 . . .	55 09.3	55 33.4	55 57.2
15 . . .	57 17.2	57 52.3	58 17.0
18 . . .	59 45.0	1 00 11.2	1 00 37.0
21 . . .	1 02 02.9	1 02 30.1	1 02 56.9
24 . . .	1 04 20.8	1 04 49.0	1 05 16.8
27 . . .	1 06 38.7	1 07 07.9	1 07 36.7
30 . . .	1 08 56.5	1 09 26.8	1 09 56.5
33 . . .	1 11 14.4	1 11 45.7	1 12 16.4
36 . . .	1 13 32.3	1 14 04.6	1 14 36.3
39 . . .	1 15 50.2	1 16 23.5	1 16 56.2
42 . . .	1 18 08.1	1 18 42.3	1 19 16.1
45 . . .	1 20 26.0	1 21 01.2	1 21 36.0
48 . . .	1 22 43.9	1 23 20.1	1 23 55.8
51 . . .	1 25 01.8	1 25 39.0	1 26 15.7
54 . . .	1 27 19.6	1 27 57.9	1 28 35.6
57 . . .	1 29 37.5	1 30 16.8	1 30 55.5
2 00 . . .	1 31 55.4	1 32 35.7	1 33 15.4

TABLE II.

LONGITUDE E ou W DE BRUXELLES	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 55^{\circ} 50'$	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 56^{\circ}$	$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 56^{\circ} 50'$
0g00' . . .	0g00' 00".0	0g00' 00".0	0g00' 00".0
05 . . .	03 82.8	03 85.3	03 87.8
10 . . .	07 65.5	07 70.1	07 75.5
15 . . .	11 48.2	11 55.8	11 63.3
20 . . .	15 30.9	15 41.0	15 51.0
25 . . .	19 13.7	19 26.3	19 38.8
30 . . .	22 96.5	23 11.5	23 26.5
35 . . .	26 79.2	26 96.8	27 14.3
40 . . .	30 61.9	30 82.1	31 02.0
45 . . .	34 44.7	34 67.3	34 89.8
50 . . .	38 27.5	38 52.5	38 77.5
55 . . .	42 10.2	42 37.8	42 65.3
60 . . .	45 92.9	46 23.1	46 53.0
65 . . .	49 75.7	50 08.4	50 40.8
70 . . .	53 58.5	53 93.6	54 28.5
75 . . .	57 41.2	57 78.9	58 16.3
80 . . .	61 23.9	61 64.1	62 04.0
85 . . .	65 06.6	65 49.4	65 91.7
90 . . .	68 89.3	69 34.6	69 79.4
95 . . .	72 72.1	73 19.9	73 67.2
1g00 . . .	76 54.8	77 05.2	77 55.0
05 . . .	80 37.6	80 90.4	81 42.7
10 . . .	84 20.4	84 75.6	85 30.4
15 . . .	88 03.1	88 61.0	89 18.2
20 . . .	91 85.8	92 46.3	93 06.0
25 . . .	95 68.6	96 31.5	96 93.6
30 . . .	99 51.3	1g00 16.7	1g00 81.2
35 . . .	1g03 34.1	1 04 02.0	1 04 69.1
40 . . .	1 07 17.0	1 07 87.3	1 08 57.0
45 . . .	1 10 99.7	1 11 72.5	1 12 44.8
50 . . .	1 14 82.3	1 15 57.6	1 16 32.6
55 . . .	1 18 65.1	1 19 43.0	1 20 20.3
60 . . .	1 22 47.9	1 23 28.3	1 24 08.0
65 . . .	1 26 30.6	1 27 13.6	1 27 95.7
70 . . .	1 30 13.3	1 30 98.9	1 31 83.3
75 . . .	1 33 96.0	1 34 84.0	1 35 71.0
80 . . .	1 37 78.7	1 38 69.0	1 39 58.7
85 . . .	1 41 61.5	1 42 54.4	1 43 46.5
90 . . .	1 45 44.4	1 46 39.7	1 47 34.4
95 . . .	1 49 27.1	1 50 25.1	1 51 22.2
2g00 . . .	1 53 09.7	1 54 10.4	1 55 10.0

TABLE II

Year	Area	Value	Percentage
1870	1,000,000	1,000,000	100.00
1871	1,000,000	1,000,000	100.00
1872	1,000,000	1,000,000	100.00
1873	1,000,000	1,000,000	100.00
1874	1,000,000	1,000,000	100.00
1875	1,000,000	1,000,000	100.00
1876	1,000,000	1,000,000	100.00
1877	1,000,000	1,000,000	100.00
1878	1,000,000	1,000,000	100.00
1879	1,000,000	1,000,000	100.00
1880	1,000,000	1,000,000	100.00
1881	1,000,000	1,000,000	100.00
1882	1,000,000	1,000,000	100.00
1883	1,000,000	1,000,000	100.00
1884	1,000,000	1,000,000	100.00
1885	1,000,000	1,000,000	100.00
1886	1,000,000	1,000,000	100.00
1887	1,000,000	1,000,000	100.00
1888	1,000,000	1,000,000	100.00
1889	1,000,000	1,000,000	100.00
1890	1,000,000	1,000,000	100.00
1891	1,000,000	1,000,000	100.00
1892	1,000,000	1,000,000	100.00
1893	1,000,000	1,000,000	100.00
1894	1,000,000	1,000,000	100.00
1895	1,000,000	1,000,000	100.00
1896	1,000,000	1,000,000	100.00
1897	1,000,000	1,000,000	100.00
1898	1,000,000	1,000,000	100.00
1899	1,000,000	1,000,000	100.00
1900	1,000,000	1,000,000	100.00