

# MÉMOIRES

---

## SUR

# UNE RUPTURE DE VOLANT

PAR

ARM. RENIER

Ingénieur au Corps des mines, à Liège.

[62185]

---

On sait combien dangereux sont les volants des machines à vapeur. Leur rupture entraîne presque toujours des accidents graves, souvent même des catastrophes. Rares sont cependant les cas où les recherches les plus minutieuses permettent de recueillir, dans le chaos de débris, des données suffisantes pour rendre possible un essai de reconstitution et l'étude critique, qui en découle naturellement. Le constructeur voit ainsi de précieux renseignements lui échapper, et se trouve impuissant à mettre à profit cette expérience si chèrement acquise. Ainsi perdurent certaines pratiques, dont le danger n'est pas suffisamment évident. C'est pourquoi l'étude des accidents typiques acquiert un regain d'intérêt d'autant plus vif que les constatations permettent de pousser plus loin les déductions. C'est sous l'impression de ce sentiment que nous publions les résultats d'une enquête, qu'il nous a été donné de faire récemment.

Une étude similaire a paru, il y a quelques années (1). Elle était due à la plume autorisée de M. H. Dechamps,

---

(1) *Revue universelle des Mines*, 3<sup>e</sup> série, t. XXII, juin 1893.

professeur à la faculté technique de l'Université de Liège. M. Dechamps a également donné quelques indications sur l'état général de la question, dans une conférence qu'il a faite à l'Association des Elèves des Ecoles spéciales de l'Université de Liège. Ces travaux nous ont été d'un réel secours, et nous prions M. Dechamps d'agréer l'expression de notre reconnaissance pour le prêt bienveillant des notes manuscrites de sa conférence (1), et sa gracieuse autorisation de publier en annexe à ce travail les notes inédites de son cours relatives au calcul du volant.

. . .

Le plan et la coupe que nous avons tracés (*fig. 1*), permettent de se faire une idée des traits essentiels de la disposition des lieux. La salle des machines, contiguë à celle de la chaudière, fait partie d'un petit bâtiment accessoire adossé au corps principal de l'usine par la façade *DE*.

La machine à vapeur est monocylindrique, à condensation; sa distribution se fait par robinets avec commande à dé clic. La détente est variable et commandée par le régulateur. Les caractéristiques de la machine sont :

Diamètre du cylindre . . . . .	450 millim.
Course du piston . . . . .	1,000 —
Nombre moyen de tours par minute. . . . .	70
Timbre de la chaudière . . . . .	8 atmosphères
Degré d'admission moyen. . . . .	1/10
Force nominale en chevaux . . . . .	125

(1) Un résumé de la conférence de M. Dechamps, sur *Les ruptures de volant et la recherche de leurs causes*, a paru dans le « Bulletin scientifique de l'Association des Elèves des Ecoles spéciales de l'Université de Liège ». Nouvelle série, 4<sup>e</sup> année, 1901-1902; n<sup>o</sup> 4, février 1902, pp. 127-8

Le condenseur est établi sur le sol en tandem de la machine; la pompe à air est activée par la tige prolongée du piston à vapeur. Le régulateur, à force centrifuge, type Watt, est commandé par un engrenage calé sur l'arbre de la machine, par l'intermédiaire d'une chaîne à maillons carrés, à emmanchement latéral.

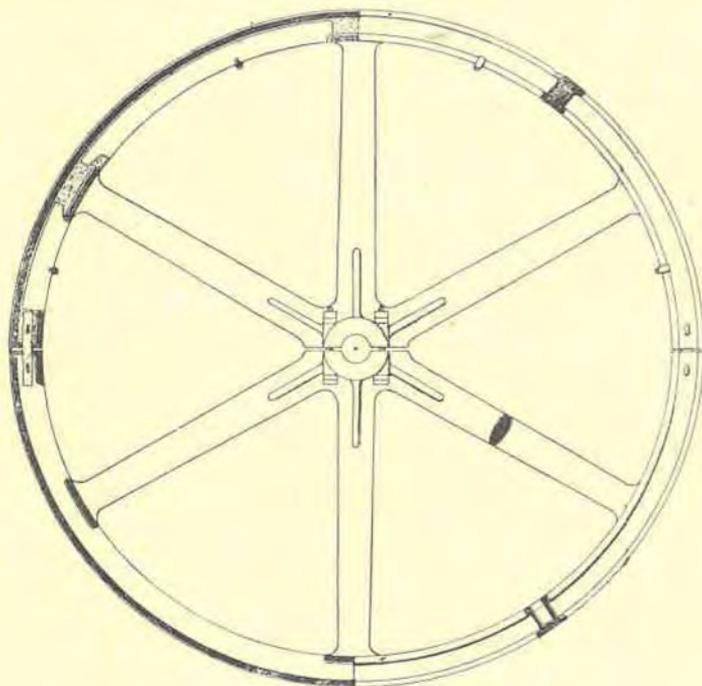


FIG. 2.

Cette machine active l'usine par l'intermédiaire d'une maîtresse transmission comprenant sept câbles en chanvre, s'enroulant sur une poulie à gorges, fixée sur l'arbre moteur. Le sens de la rotation est de  $D$  en  $F$ , en passant par le haut. La régularité de la marche était assurée par un volant en fonte de 5 mètres de diamètre (*fig. 2*); son poids,

lors de la réception, était de 4,590 kilogrammes. La jante seule pesait, d'après cubature, environ 2,430 kilogrammes. Sa section en forme d'U se transformait en caisson creux à la jonction des bras. La figure 3 en donne les dimensions.

Six bras, de section elliptique, réunissaient la jante au moyeu ; ils mesuraient  $260 \times 110$  millimètres près du moyeu ; et  $220 \times 90$  millimètres près de la jante.

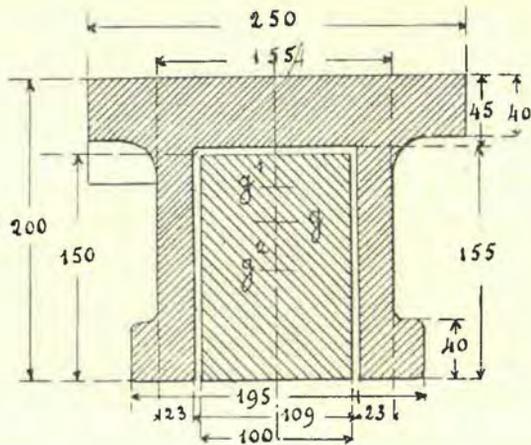


FIG. 3.

Le volant était composé de deux parties assemblées à la jante d'une part, et au moyeu d'autre part. Ce dernier assemblage, qui assurait aussi la liaison du volant et de l'arbre moteur, était composé de quatre forts boulons avec écrou et contre-écrou. Les deux parties étaient réunies à la jante par une barre de fer de section rectangulaire fixée par clavettes en fer. Les deux parties ne se touchaient que par une bande formant sur l'une d'elles une saillie de

6 millimètres et large de 10 millimètres, dans la partie la plus extérieure du joint (*fig. 4*).

A la suite d'installations nouvelles, le volant fut reconnu trop léger. On le surchargea, de l'avis du constructeur, en utilisant la cavité existant dans la section de la jante (*fig. 2* et 3). On plaça entre les bras des lingots de fonte gabariés, de section rectangulaire. Pour les maintenir en place, on coula du plomb près de chaque bras de manière à enrober l'extrémité du lingot (partie ponctuée, *fig. 2*). Pour augmenter le serrage, on chassa çà et là dans la masse de

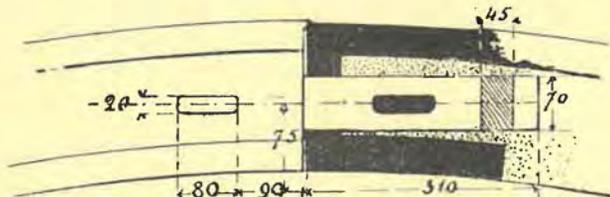


FIG. 4.

plomb de petits coins en fer. Enfin, on posa quelques étriers métalliques embrassant les ailes de l'U et fixés aux lingots par de petits boulons prisonniers. Le poids total de cette surcharge était de 1,200 kilogrammes de fonte et de 600 kilogrammes de plomb, au total environ 1,800 kilogrammes.

C'est durant le poste de nuit que s'est produit l'accident. Le chauffeur-machiniste se trouvait seul dans la salle de la machine. Quelques minutes avant l'heure de la reprise du travail, il remit, comme à l'ordinaire, la machine en train, afin qu'au moment voulu elle fut en bonne allure. Durant cette marche à vide, le réglage automatique de la machine avait toujours été parfait.

Pendant deux ou trois minutes, tout marcha normalement. Mais bientôt les ouvriers qui se trouvaient dans l'usine, virent le mouvement des transmissions, jusque-là régulier, s'accélérer progressivement.

Peu après, ils entendirent un bruit semblable à celui que produit la déflagration d'un explosif.

Lorsqu'il fut possible de pénétrer dans la salle de la machine, elle était pleine de vapeur.

La machine tournait encore. Le modérateur était ouvert sans exagération.

Le cadavre du chauffeur fut retrouvé à l'arrière du condenseur. Un débris de la fonte du volant lui écrasait la poitrine.

Les dégâts matériels ont été très considérables (*voir fig. 1*). La toiture a été détruite sur la partie représentée dans la coupe par des traits interrompus. C'était à peu près sur cette étendue que régnait, le long de  $DF$ , le lanterneau vitré qui éclairait la salle. Une ferme de la charpente en bois  $C$  était cisailée à environ  $1^m20$  du mur. Une poutre de levage,  $A$ , en bois, portait à la même distance de  $DF$  une éraflure fraîche. La plateforme de service était entièrement détruite; les gitages qui la supportaient, étaient cisailés à environ  $1^m20$  du mur. De larges brèches avaient été ouvertes dans les murs de la salle et du réduit voisin; nous les avons distinguées dans la coupe et sur le plan, en les couvrant de hachures. Le mur  $DE$  était abattu sur  $1^m20$  de largeur et  $3^m70$  de hauteur, près de  $D$ . Le mur  $FG$  était renversé sur toute sa hauteur. La brèche présentait deux évasements, l'un à  $1^m20$ , l'autre à  $3^m40$  au dessus du sol. Les débris se trouvaient dans le réduit  $FGHI$ ; une partie était tombée dans la fosse du volant. Le mur  $HI$  présentait une ouverture ovale large de  $1^m40$ , et dont le centre se trouvait approximativement à  $2^m75$  au dessus du sol et dans le pro-

longement du plan moyen du volant. Les décombres étaient éparpillés sur 8 mètres de longueur dans la cour voisine. Enfin, la corniche de la façade *DE* du bâtiment principal avait été arrachée en *B* sur une assez faible longueur (environ 2<sup>m</sup>50). Les débris furent retrouvés par delà le bâtiment principal.

La machine ne présentait aucune trace de déformation. Les organes de distribution n'étaient pas faussés, et les surfaces des touches de dé clic étaient polies. Les robinets d'admission ne montraient aucun indice de grippement. Les boulons de fondation étaient intacts. Le guide inférieur de la crosse présentait une strie polie. Le métal antifric tion formant le revêtement intérieur du coussinet du palier intermédiaire, présentait des traces de fusion et des marques d'usure inégale. Le condenseur, dont le couvercle, du côté des soupapes de refoulement, n'était pas boulonné, était recouvert d'un enduit gras et humide; le tuyau d'amenée d'eau froide au condenseur était cassé près d'un joint, dans la fosse du volant. Des sept câbles de transmission, un était brisé et un autre avait sauté dans une gorge voisine.

Le régulateur avait ses organes absolument intacts (1). Il ne possédait plus sa chaîne de commande. Les débris de la chaîne furent retrouvés, très morcellés, çà et là sur le sol et dans la fosse du volant. Un seul maillon était déformé, mais on remarquait que le crochet de quelques anneaux était ouvert et que l'on pouvait le faire sortir du maillon engagé sans avoir recours au dégagement latéral.

---

(1) Le régulateur était muni d'un dispositif de sûreté, tel qu'en cas de rupture de la chaîne de commande, le régulateur, s'arrêtant et descendant à fond de course, produisait par son poids un déclanchement : il en résultait la fermeture complète de l'admission de vapeur au cylindre. Par suite du matage des articulations résultant de l'usure, la pesée n'était plus suffisante pour agir sur le déclanchement. Il a suffi de donner un demi-tour à la vis de rappel pour remettre les choses en état.

L'arbre de la machine était dans ses coussinets, le volant était sur l'arbre. On voyait sur la portée, dans la partie découverte entre les deux parties du volant, une couche noire et grasseuse. Le volant avait la jante brisée, ainsi que l'extrémité supérieure d'un bras. La partie de la jante correspondant au prolongement des bras était restée atta-

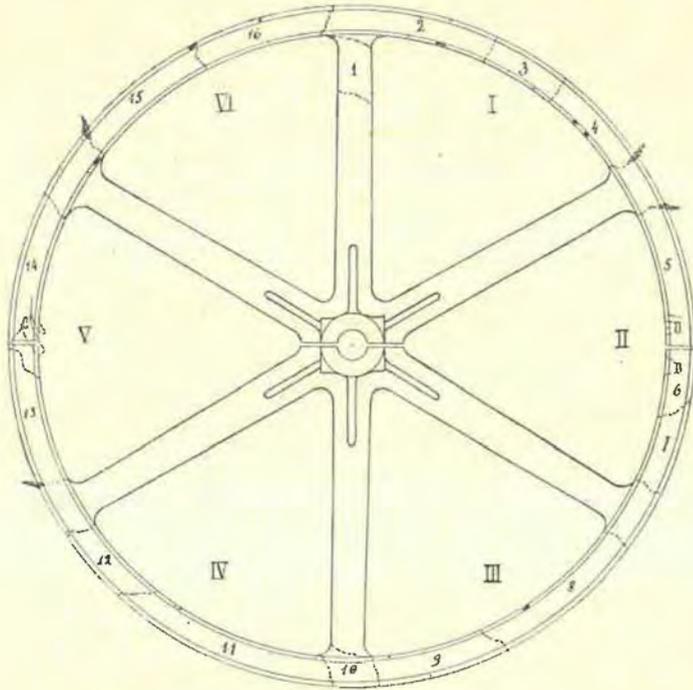


FIG. 5. — A.

chée à quatre bras; le bris avait eu lieu à la section où l'U se transformait en caisson creux. Elle avait été arrachée aux deux autres, perpendiculaires à la ligne de jonction des deux parties. Les débris du volant étiquetés ont été réunis et assemblés, de manière à reconstituer cette pièce (fig. 5, A et B). Les surcharges possédant le même numéro

que le tronçon correspondant y étaient encore engagées. La figure *A* montre également la position des lames de plomb qui se trouvaient dans les caissons.

Voici la liste des débris et leurs emplacements (fig. 5) :

N° 1. Morceau de bras ; se trouvait avec 18 et 19 dans la

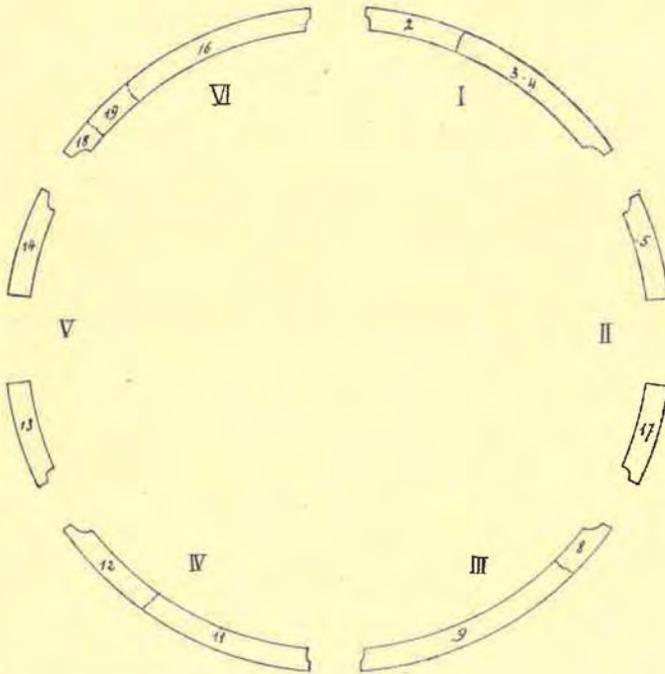


FIG. 5 — B.

fosse du volant, sur le tas de briques provenant de la démolition du mur *FG* ;

N°s 2, 3, 4 (arc n° I) gisaient dans la cour, au-delà de *HI*, au milieu des décombres ;

N°s 5, 6, 7 (arc n° II) se trouvaient dans une rue voisine. Ils étaient encore juxtaposés. Dans ces morceaux,

- particulièrement les 6 et 7, les ailes avaient été brisées lors de la chute ; les débris étaient éparpillés jusqu'à 8 mètres du point où avait eu lieu la première chute ;
- N<sup>os</sup> 8 et 9. Arc n<sup>o</sup> III, retrouvé enfoncé au milieu de détritits, dans une fosse, à 78 mètres de l'axe du volant. Le mur contre lequel cette fosse est située, présentait deux éraflures (voir coupe), sur la même verticale, l'une au toit, l'autre à une saillie. Un petit toit, qui recouvrait la fosse, sans toucher le mur, n'avait pas été atteint. Le poids de ce segment était de 450 kilogrammes ;
- N<sup>os</sup> 10 et 11 se trouvaient au delà de *DE*, dans la caisse aux cordes, alors que le
- N<sup>o</sup> 12, qui avec eux constitue l'arc n<sup>o</sup> IV, écrasait la victime ;
- N<sup>os</sup> 13 et 14 (arc n<sup>o</sup> V), enfouis profondément sous le tas de briques dans la fosse du volant. L'assemblage était fortement disloqué ;
- N<sup>os</sup> 15 et 16 (arc n<sup>o</sup> VI), gisaient au milieu des débris de muraille, dans le réduit *FGHI* ;
- N<sup>o</sup> 17 (surcharge), correspondant à 6-7, morceau enfoncé verticalement dans le sol de la cour ;
- N<sup>os</sup> 18 et 19 (surcharge). Voir n<sup>o</sup> 1.

L'allure des cassures est indiquée au croquis. Nous ajouterons que les joints avaient été fortement abimés ; des fissures de cisaillement existaient tant dans les ailes que dans la masse de plomb du fragment n<sup>o</sup> 5, alors que les numéros 6 et 13 avaient l'extrémité brisée suivant le plan supérieur de la clavette et la section radiale à l'extrémité de celle-ci. La barre d'assemblage, fortement arquée, était encore engagée dans le n<sup>o</sup> 14. La jante était fendue suivant le plan inférieur de la clavette. Cette lame était fortement ployée.

Les cassures des débris de la jante, qui n'avaient pas été

abimées, étaient d'un bel éclat métallique. La cassure du bras correspondant au débris n° 1 présentait une zone métallique entourée d'une zone jaune-brun. Cette teinte dominait dans les cassures du volant resté en place. La cassure du bras (II-III) montrait un redoublement de fonte.

Tels sont les faits. Quelqu'aride que puisse paraître cet exposé, nous avons cru indispensable de le livrer sous cette forme au lecteur, afin qu'il possède, tels que nous les avons recueillis, les éléments d'appréciation. Nous nous permettons de lui présenter à présent les quelques considérations que nous croyons pouvoir déduire de ces observations.

Les circonstances dans lesquelles l'accident s'est produit sont nettes et précises. Il a eu lieu pendant un emballement de la machine. La cause de cet emballement est aisée à trouver. En effet, la machine se réglait automatiquement durant la marche à vide. Si elle s'est emportée, c'est donc que le régulateur a cessé d'agir. On ne peut cependant supposer qu'ils s'est trouvé en dehors des limites de charge ordinaires, puisque la maîtresse transmission était intacte et que dans l'usine aucune courroie n'avait sauté de sa poulie. D'autre part, on ne peut supposer que l'admission du fluide moteur au cylindre ait pu être prolongée outre mesure : car tous les organes de distribution étaient en bon état. On est donc conduit à admettre que c'est dans l'arrêt du régulateur qu'il faut chercher la cause du manque de réglage, et puisque l'appareil lui-même était en bon état, il faut croire que c'est la chaîne de commande qui s'est rompue. Ces bris sont d'ailleurs assez fréquents ; aussi les inventeurs ont-ils imaginé nombre d'appareils de sûreté destinés à parer à ce danger. Nous avons eu l'occasion de signaler (1) la valeur pra-

---

(1) Voir note p. 9.

tique de ces appareils, qui, imparfaitement surveillés, n'ont souvent pour effet que d'inspirer une confiance trompeuse.

Quant à la cause immédiate du bris de la chaîne, nous ne pouvons la préciser, faute d'éléments critiques.

Le volant s'est rompu pendant un emballement de la machine, c'est-à-dire par excès de vitesse. C'est ce que confirme l'examen du mode de rupture. Le volant ne s'est pas déplacé sur l'arbre; les bras ne sont pas cisailés, et le tronçon de jante qui se trouvait dans leur prolongement direct, y est dans quatre cas demeuré attaché. La jante a cédé par tronçons entiers, et les arcs se sont rompus à la section où l'U se transformait en caisson creux. Cette section constituait *a priori*, par suite de l'inégalité de sollicitation de ses deux faces, la section dangereuse.

Mais il y a plus. L'examen de la coupe verticale passant par le plan moyen du volant révèle l'existence d'une loi dans la répartition des débris. Nous en avons deviné l'existence dès les premiers instants de la reconstitution du volant; et nous avons reconnu le bien fondé de cette hypothèse en l'utilisant avec succès pour déterminer théoriquement la position du segment V, qui, enfoui sous les décombres, n'avait pas encore été découvert.

La répartition a eu lieu comme si le volant s'était brisé d'une façon instantanée. La simplicité même de cette hypothèse plaide en faveur de sa vraisemblance. Il est en effet de la plus haute improbabilité — pour ne pas dire plus — que les tronçons de la jante se détachant successivement, se soient brisés successivement et tous à la même période de la révolution. Au reste, on remarquera que dans ce cas, après le départ du tronçon qui se serait rompu le premier, le centre de gravité du volant aurait été reporté excentriquement à l'arbre moteur. L'effet de ce balourd aurait été de déterminer de violentes réactions sur les supports de l'arbre. Or, nous avons dit que l'arbre était resté dans ses

coussinets, et que les attaches du palier aux fondations étaient intactes. La rupture a donc eu lieu sur toute la périphérie presque instantanément.

. .

Nous chercherons à présent à préciser l'allure de la machine au moment de la rupture. Nous croyons inutile d'insister sur l'intérêt de cette recherche.

La rupture ayant eu lieu instantanément, il est évident que pour connaître la vitesse de rotation de la machine, à ce moment, il suffit de rechercher la vitesse initiale du jet de l'un quelconque des segments. L'examen de la coupe verticale montre que les segments 8 et 9, dont la trajectoire est bien définie, permettent de rechercher cette intéressante valeur. Ils forment un arc de  $2^m20$  de développement, mesuré extérieurement, contenant toute sa surcharge, et cette surcharge existe sur toute la longueur du tronçon. On peut donc le considérer comme étant de section homogène sur toute sa longueur. Les débris gisaient l'un à côté de l'autre et encore emboîtés. Leur séparation semble être le résultat d'un choc au moment de la chute. Ils forment donc un tout. Ce débris, après avoir écorné la poutre *A*, a entaillé la corniche en bois *B* de la façade *DE*, et est finalement allé retomber à  $78^m33$  de l'axe du volant, et dans le prolongement exact du plan moyen de cette pièce, ainsi que l'a établi une minutieuse opération topographique. Sa chute en ce point, paraît avoir été verticale, ainsi qu'il résulte de la disposition des lieux décrite plus haut. Au reste, la différence de niveau est faible et n'atteint pas deux mètres..

Les formules de mécanique analytique permettent — le jet et un point de la courbe étant connus — de déterminer l'angle de tir et la vitesse initiale. Ces données se rapportent évidemment au centre de gravité du segment.

Il est aisé de déterminer la distance de ce centre de gravité au centre de l'arbre de la machine. La section étant supposée uniforme (elle est faiblement altérée aux abouts de la surcharge) et homogène sur toute sa longueur, le centre de gravité  $G$  du segment est le centre de gravité de l'arc de cercle  $AB$  (fig. 6), lieu géométrique des centres de gravité  $g$  des sections.

En réduisant le profil à ses formes géométriques —

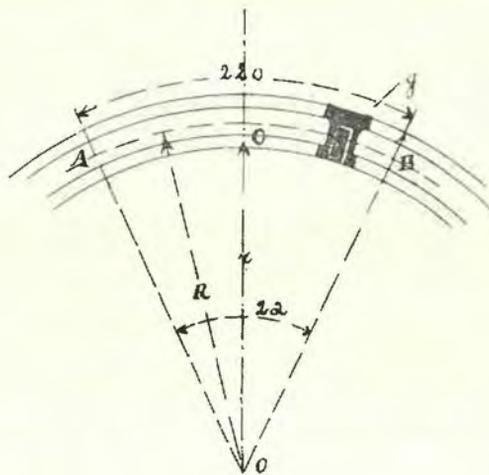


FIG. 6.

approximation bien suffisante pour ce genre de recherches et d'ailleurs peu erronée, — on trouve en se servant des dimensions données à la figure 3 :

Centre de gravité de l'U . . . . .	$Ag_1$	7.15	centim.
Id. de la surcharge $Ag_2$		12.5	id.
Id. de la section composée . . . . .	$Ag$	9.48	id.
D'où . . . . .	$R = og$	240.52	id.

Il est facile de trouver  $G$ , sachant que :

$$OG = r = \frac{R \times \text{corde}}{\text{arc}} = \frac{R \sin \alpha}{\frac{2 \alpha \pi}{360}}$$

Or, le tronçon ayant 220 centimètres de développement d'arc au rayon de 250 centimètres :

$$\frac{2\alpha}{360} \pi = \frac{220}{500}$$

$$\alpha = 25^{\circ}12'30'' \quad \sin \alpha = 0.48591$$

et finalement,  $r = 232.8$  centimètres.

La courbe balistique a pour équation en coordonnées rectangulaires :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

si l'on admet que les distances sont portées en abscisses, les hauteurs en ordonnées, et si  $\alpha$  est l'angle de tir ou angle de la tangente à l'origine avec l'horizontale, et  $v_0$  la vitesse initiale. C'est une parabole du 2<sup>e</sup> degré, dont l'axe est vertical, et qui est tangente à l'origine à la direction de la vitesse initiale.

Introduisons dans l'équation (1) les coordonnées du point où le projectile recoupe l'axe des abscisses,  $y = 0$  et  $x = l$  ou portée du jet, nous aurons :

$$gl = v_0^2 \sin 2\alpha \quad v_0^2 = \frac{lg}{\sin 2\alpha} \quad (2)$$

La combinaison de (1) et de (2) donne :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ly}{lx - x^2} \quad (3)$$

L'équation (1) suppose que l'origine des coordonnées est la position initiale du centre de gravité du mobile. Cette position est inconnue, tant que l'on ignore la valeur de  $\alpha$ . Comme première approximation, nous supposerons l'origine des coordonnées au centre de l'arbre.

Dans ces conditions :

$$l = 78^m33, \quad (B) \quad x = 9^m40 \quad y = 16^m35$$

$$tg \alpha = 1.9766 \quad \alpha = 63^\circ 10'$$

Cette valeur de  $\alpha$  permet de calculer les coordonnées de la position initiale du centre de gravité du segment, par rapport au centre de l'arbre :

$$X = 2^m076 \quad Y = -1,050$$

Rapportées à cette nouvelle origine, les données deviennent :

$$l = 76^m25, \quad (B) \quad x = 7^m30 \quad y = 17^m40$$

$$D'où : \quad tg \alpha = 2,6359 \quad \alpha = 69^\circ 15'$$

Une seconde approximation donne :

$$X = 2,176 \quad Y = -0,824$$

$$l = 76^m15, \quad (B) \quad x = 7.23 \quad y = 17.18$$

Ces valeurs sont exactes, car elles conduisent à la même valeur de  $\alpha$ , à quelques minutes près.

Enfin, l'équation (2) donne :

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{\sin 2\alpha}} = 33^m57 \text{ par seconde.}$$

La vitesse à la périphérie du volant était donc de :

$$V = \frac{v_0 \times 250}{232.8} = 36^m05 \text{ par seconde.}$$

ce qui correspond à une allure de :

$$n = \frac{36.05 \times 60}{\pi \times 5} = 137.7 \text{ tours par minute.}$$

Cette valeur constitue un minimum. En effet, la courbe balistique n'est une parabole, que pour autant que l'on fasse abstraction de la résistance de l'air, qui s'oppose au déplacement du mobile.

Cette résistance réduit surtout la portée. La portée du jet que nous aurions dû introduire dans les formules, est donc supérieure à celle que nous avons adoptée. La portée a encore été réduite pour un autre motif. La pièce a détruit le lanterneau vitré qui couvrait la salle, et a enlevé la corniche du bâtiment principal, sur une faible longueur, il est vrai. Il en résulte qu'accomplissant ainsi un travail, elle a perdu de sa force vive. Il faut remarquer cependant que la destruction du vitrage est aisée et que la résistance offerte par une pièce de bois faiblement attachée et de section réduite, à une masse de 450 kilogrammes et animée d'une grande vitesse, devait être bien minime. Ces résistances ont été impuissantes à faire dévier le projectile du plan moyen du volant. Aussi doit-on considérer comme très rapprochée de la vérité, la valeur de la vitesse déterminée, en faisant abstraction de la réduction de portée résultant de ces deux causes; on vérifierait d'ailleurs aisément en adoptant le même angle de tir, qu'une réduction de 6 mètres de portée (82 mètres au lieu de 76) ne conduirait qu'à une réduction de 5 tours (142 au lieu de 137). L'erreur est négligeable.

En présence de ce résultat, nous avons cru intéressant de rechercher à quelles tensions les différentes pièces du volant étaient soumises. Cette recherche présente d'autant plus

d'intérêt que dans le cas de la rupture par action de la force centrifuge, la surcharge que l'on a donnée au volant, a pu jouer un rôle important et qu'il convient de mettre en évidence. Cette surcharge ne doit, en effet, être comptée que comme produisant une augmentation de poids sans augmenter la résistance. Car les liaisons des lingots de fonte avec la jante ne présentent qu'une rigidité bien aléatoire, et ne servent qu'à les maintenir en place. Quant au plomb, sa résistance est négligeable. Dans ce cas, les choses se passent donc comme si la jante conservant la même résistance, par unité de surface, avait un poids spécifique plus grand.

Je me suis servi pour rechercher la tension du métal dans les différentes parties du volant, des formules données par Unwin (1), qui résultent d'une étude complète des sollicitations. Toutefois les formules sont insuffisantes pour le cas du volant surchargé dans lequel tout se passe comme si la densité du métal était différente dans la jante et les bras. On utilise dans ce cas avec succès les formules que M. H. Dechamps (2) a établies en généralisant la théorie d'Unwin.

Ces formules donnent la valeur des tensions développées dans chaque section de la jante, par la force centrifuge, dans le cas d'une vitesse uniforme et dans l'hypothèse que la jante du volant est de résistance et de raideur uniformes, et que sa figure de déformation élastique est peu différente d'une circonférence de cercle.

Elles permettent de déterminer dans chaque section de la jante :

La force agissant dans le plan de la section  
 • (effort tranchant) . . . . . S

(1) UNWIN. *Elements of machine design.*, 14<sup>e</sup> édition, Londres, 1897, t. II, p. 191.

(2) H. DECHAMPS. Cours de construction et applications des machines, professé à la faculté technique de l'Université de Liège. Notes manuscrites. Année académique 1898-1899. — Voir annexe.

- La force agissant perpendiculairement à ce plan (traction ou compression) . . . . . T  
 Le moment fléchissant . . . . . M  
 ainsi que la traction de la jante sur le bras . . . . . F

Dans les formules ci-après (*fig. 7*) :

$2\alpha$  est l'angle de deux bras consécutifs du volant . . . . .  $\alpha = 30^\circ = : 0.5236$ .

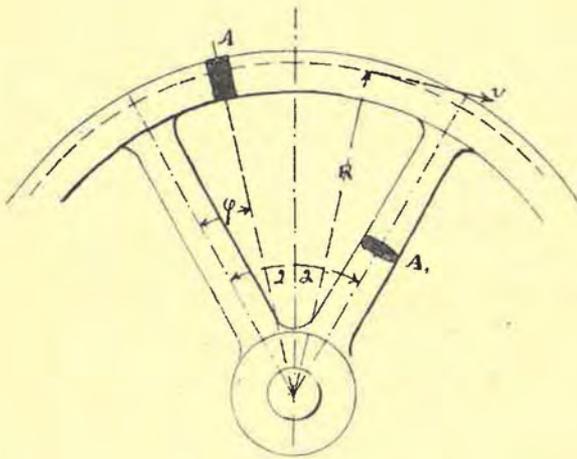


FIG. 7.

- $\phi$  l'angle de la section considérée avec l'axe d'un bras pris pour origine des angles . . . . . »  
 A la section de la jante . . . 195.05 cm<sup>2</sup>  
 G le poids spécifique de la jante . . . 7.2 gr. par cm<sup>3</sup>.  
 g la constante gravifique . . . 981 cm. par seconde.  
 R le rayon moyen du volant . . . 242.85 cm.

$v$	la vitesse à la circonférence moyenne du volant	
	$= \frac{2\pi R}{60} \times 140 . . . . .$	3560 cm. parseconde
$A_1$	la section moyenne d'un bras. . . . .	188,49 cm <sup>2</sup> .
$G_1$	le poids spécifique du métal des bras . . . . .	7,2 gr. par cm <sup>3</sup> .

$$S = - \frac{F \sin (\alpha - \varphi)}{2 \sin \alpha}$$

$$T = \frac{G}{g} A v_2 - \frac{F \cos (\alpha - \varphi)}{2 \sin \alpha}$$

$$M = \frac{FR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos (\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right)$$

$$F = \frac{\alpha v^2}{3 g} (3G - G_1) \frac{AA_1 \alpha}{2A\alpha + A_1}$$

Deux sections sont spécialement dangereuses. Ce sont les extrémités et le milieu de l'arc  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \alpha$ .

Nous avons recherché les valeurs de S, T, M et F, pour l'allure de 140 tours, le volant étant ou n'étant pas surchargé. Dans le premier cas, nous avons supposé que l'augmentation de poids produisait une augmentation du poids spécifique du métal de la jante proportionnelle à la surcharge.

On a ainsi :

$$G_s = 7.2 \frac{2,430 + 1,810}{2,430} = 12.56 \text{ grammes par cm}^3.$$

Il est aisé d'obtenir la valeur des tensions en service, à 70 tours; car les tensions croissent comme le carré de la vitesse, ainsi que le prouve l'examen des formules S, T, M

et F. A 70 tours, les tensions sont donc quatre fois moindres qu'à 140 tours.

A 140 TOURS	SANS SURCHARGE	AVEC SURCHARGE
F . . . . .	6,078	12,867
S . . . . . $\varphi = 0^\circ$	- 3,039	- 6,433
S . . . . . $\varphi = 30^\circ$	0	0
T . . . . . $\varphi = 0^\circ$	12,878	20,506
T . . . . . $\varphi = 30^\circ$	12,064	18,782
M . . . . . $\varphi = 0^\circ$	131,241	277,793
M . . . . . $\varphi = 30^\circ$	- 66,543	- 140,850
		en kilogrammes.

On en déduit aisément les tensions résultantes dans les diverses parties du volant :

Tensions :

A) dans la jante (*fig. 3*) :

$$A = 195.05 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{I}{v} = \frac{8,037.8}{12.85} = 625.5 \text{ en centimètres.}$$

Pour  $\varphi = 0$

	Sans surcharge.	Avec surcharge.
$s = \frac{S.}{A} =$	15.5	33.0

$l = \frac{T.}{A} =$	66.0	105.3
----------------------	------	-------

$r = \frac{M.v}{I} =$	209.8	444.4
-----------------------	-------	-------

$\varphi = 30$	$s = \frac{S.}{A} =$	0	0
----------------	----------------------	---	---

$$t = \frac{T}{A} = 61.8 \quad 96.3$$

$$r = \frac{Mv}{I} = 106.4 \quad 225.2 \text{ en kgr./cm}^2.$$

On voit que la section dangereuse se trouve à l'encastrement des bras. Faisant abstraction de l'effort tranchant, on obtient pour valeur de la tension en ce point.

	Sans surcharge.	Avec surcharge.
$\varphi = 0$ $t+r$ à 140 tours . .	275.8 kgs/cm <sup>2</sup> .	549.7
à 70 id. . .	68.9 id.	137.4

B) à l'assemblage (*fig. 4*) :

La barre en fer d'assemblage des deux parties du volant était de forme rectangulaire :

Hauteur . . . . . 7.0 centimètres.

Largeur . . . . . 4.5 id.

D'où . . . .  $A_2 = 31.5 \text{ cm}^2$ .

$$\frac{I_2}{v_2^3} = 36.75 \text{ en centimètres.}$$

On en déduit ( $\varphi = 30^\circ$ ), en supposant le joint rigide :

	Sans surcharge.	Avec surcharge.
$t = \frac{T}{A^2} =$	383 kgr. par cm <sup>2</sup> .	594

$r = \frac{Mv_2}{I_2} =$	1,811 id.	3,832
--------------------------	-----------	-------

Tension totale.	2,194 id.	4,426
Id. à 70 tours	548 id.	1,106

C) dans les bras :

1° à la jonction des bras et de la jante :

$$A_1 = 155.5 \text{ cm}^2.$$

	Sans surcharge.	Avec surcharge:
$t = \frac{F}{A_1}$	= 39.1 kgr. par cm <sup>2</sup> .	82.7.
Id. à 70 tours.	9.8 id.	20.7

2° au moyen :

Il faut ajouter à F la force centrifuge provenant du bras :

$$F^1 = \frac{B}{g} \frac{v'^2}{R'}$$

en posant :	B égal le poids du bras	285 kilogrammes.
	g constante gravifique.	981 centimètres.
	R' rayon moyen du bras	125.3 id.
	v' vitesse circonféren- tielle pour le rayon	
	R <sup>2</sup> . . . . .	1,837 id.

on a ainsi :  $F^1 = 7,822.5$  kilogrammes.

$A'_1$  étant égal à 224.62 cm<sup>2</sup>.

	Sans surcharge.	Avec surcharge.
$t' = \frac{F + F^1}{A'_1}$	= 61.8 par kgr. par cm <sup>2</sup> .	92.1
à 70 tours =	15.4 id.	23.0

En livrant ces chiffres à l'appréciation du lecteur, nous croyons devoir faire encore quelques remarques relativement aux conditions générales de résistance du volant.

Tout d'abord, les résultats que nous avons obtenus par le calcul, ne sont, comme on le pense bien, qu'une approxi-

mation. Car, nous avons supposé que la surcharge était uniformément répartie sur toute la périphérie du volant, alors qu'elle était plus fortement localisée dans les parties qui avaient reçu une masse de plomb.

Bien plus, si l'on doit admettre que les valeurs obtenues dans cette hypothèse donnent dans une certaine mesure une idée des conditions de sollicitation à l'allure de 70 tours, on ne peut supposer qu'il en est encore de même pour la vitesse de 140 tours. En effet, les formules que nous avons employées ne sont applicables que dans les limites des déformations élastiques. Or, il est évident qu'à l'allure de 140 tours, la tension avait dépassé, dans certaines parties, la limite d'élasticité tant dans le cas du volant surchargé que dans celui du volant sans surcharge. Toutefois, il y a là un contrôle de la bonne qualité de la fonte du volant, en même temps que d'intéressants éléments de comparaison entre les deux cas étudiés.

Nous avons supposé également dans ces calculs que les assemblages du volant étaient sans influence sur sa résistance, c'est-à-dire que leur résistance et leur élasticité (ou leur raideur) étaient les mêmes que celles de la jante. Il est bien évident que cette hypothèse imposée par les nécessités du calcul est fautive. Nous en trouvons la preuve dans les déformations très accentuées que nous avons relevées en ces points. Les clavettes avaient dans presque tous les cas cisailé, tant les ailes de la jante que la masse de plomb. Il serait toutefois très malaisé de soumettre leurs conditions de résistance à une étude mathématique. Car, outre que le système est complexe et hétérogène, il est susceptible de déformation. Le contact des tronçons n'ayant lieu que dans la partie la plus extérieure du joint, celui-ci s'est sous l'effort refermé jusqu'au contact dans la région des fibres comprimées, c'est-à-dire, dans la partie la plus intérieure. C'est ainsi que s'est peut-

être pliée la barre du n° 14. Cette déformation a certainement dû développer des tensions considérables d'autant plus qu'elle a été exagérée ici par la disposition même de la surcharge. Car on avait placé au centre de l'arc une forte masse de plomb, dont l'excès de poids a accentué en ce point les effets de la force centrifuge.

Aussi sommes-nous porté à croire que la rupture a commencé par cet arc. En effet, les calculs montrent que la pièce la plus fatiguée est la barre en fer qui réunit les deux parties du volant. Certes, ces calculs ne sont qu'approximatifs : car nous avons supposé, pour l'établissement des formules, que l'arc était continu, alors que tout au contraire, il devrait être considéré comme articulé à la clef, dès que le contact des faces de joint est reporté dans la région des fibres comprimées. Mais, vu la rigidité de l'assemblage, l'articulation est imparfaite : la barre est donc toujours tendue et fléchie à la fois.

Enfin, nous ignorons absolument la vitesse de rotation à laquelle ce mouvement de bascule — de faible amplitude d'ailleurs, — s'est produit.

Il est donc hautement probable que la barre d'assemblage a vu sa limite d'élasticité rapidement dépassée, et a pu s'allonger d'une quantité sensible. Le joint a dès lors baillé largement vers l'extérieur. La figure de déformation de l'arc s'est accentuée. Il en est résulté une répartition nouvelle des tensions, toute différente de celle que nous a donné le calcul, avec aggravation de charge aux naissances et diminution à la clef. Finalement l'arc s'est rompu aux naissances, et le choc résultant de ce bris a provoqué la rupture des arcs voisins déjà fortement tendus.

On remarquera également que la rupture de la jante s'est faite d'une façon spéciale, à la jonction des deux bras perpendiculaires à la ligne des assemblages. Le tronçon qui se trouvait dans le prolongement du bras y a été arraché.

Nous ignorons quelles peuvent avoir été les causes de ce mode spécial de rupture; nous nous bornerons à faire remarquer que les tensions initiales provenant du retrait à la coulée doivent avoir été maximum dans cette région, où la présence d'une masse de plomb a certainement, ici encore, amplifié l'action de la force centrifuge.

La rupture du tronçon n° 1 du bras I-VI a vraisemblablement été tardive. Elle est, croyons-nous, le résultat de la chute sur cette pièce des débris du mur FG.

Remarquons enfin que les teintes brunes d'oxydation relevées dans la section de rupture de ce fragment n° 1, ne peuvent être considérées comme la preuve évidente de l'existence d'une fissure ancienne. La rupture du volant a en effet provoqué le bris de la conduite d'amenée d'eau froide au condenseur. Celui-ci a donc cessé de fonctionner, et la vapeur de décharge s'est répandue dans la salle de machine. Ainsi a été créé une atmosphère humide et chaude, éminemment oxydante.

*Liège, septembre 1902.*



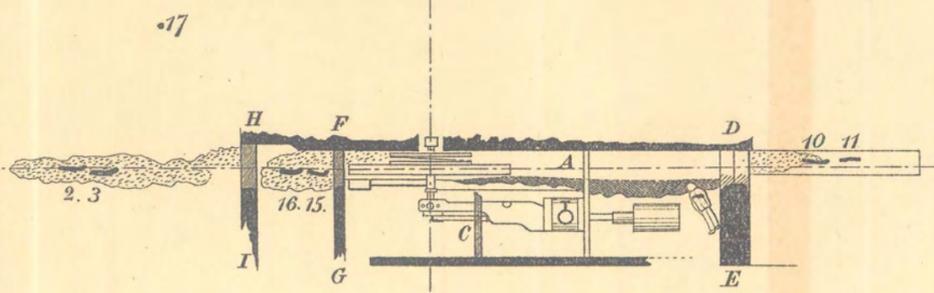
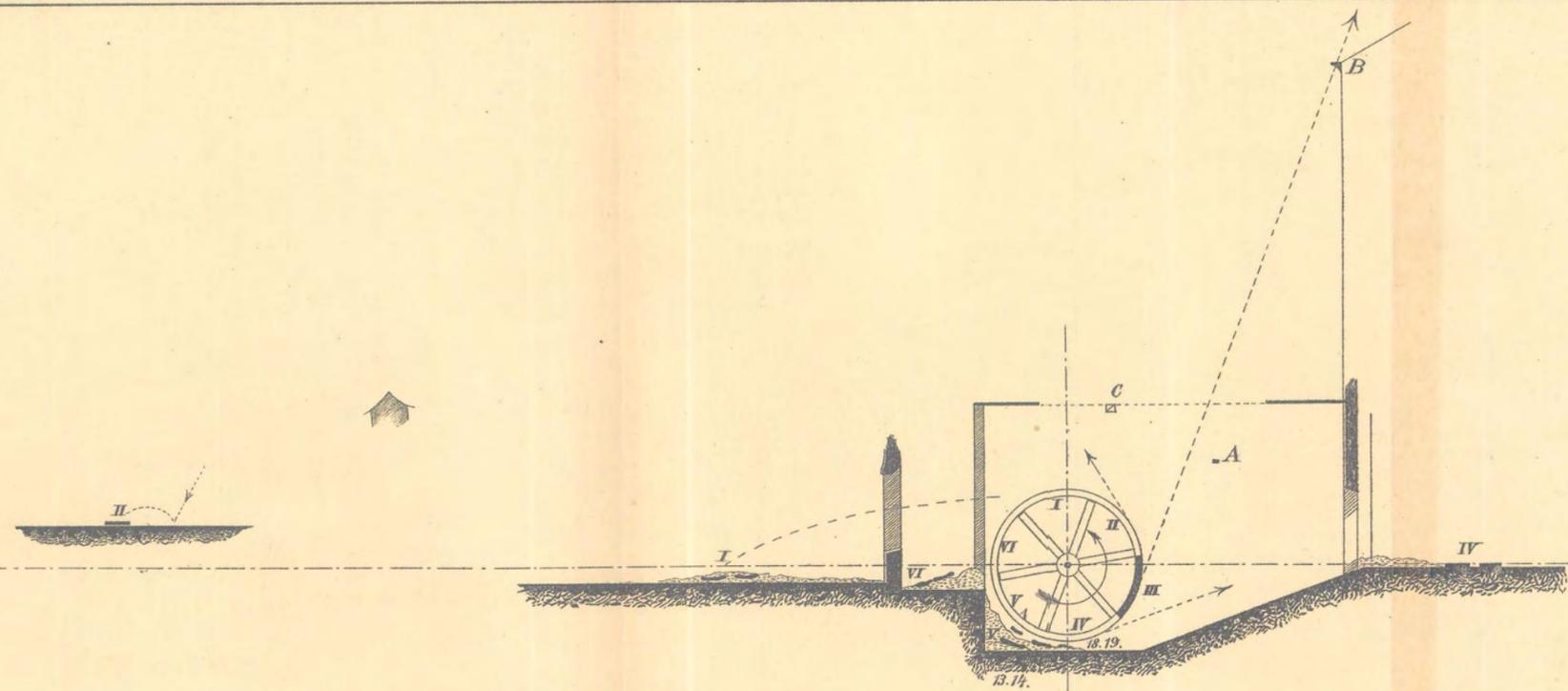
Fig. 1

Coupe verticale passant par le plan moyen du volant.

Plan.

Usine.

Echelle :  $\frac{1}{200}$  me.



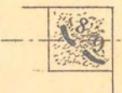
5.6.7.

2.3

16.15.

10 11

5.6.7.



# CALCUL DU VOLANT

Etude mathématique

des conditions de sollicitation des bras et de la jante d'un volant  
lorsque celui-ci n'a à résister qu'à la force centrifuge (1)

D'APRÈS DES

Notes prises au *Cours de construction et applications des machines*  
professé par M. H. DECHAMPS,  
à la faculté technique de l'Université de Liège.

Cette étude est basée sur quelques hypothèses, destinées à simplifier ou à rendre possibles les calculs, et que nous préciserons tout d'abord:

1°) Le volant est supposé tourner à une vitesse angulaire constante. Nous négligeons ainsi les efforts que développe dans les différentes parties du volant la force tangentielle, ou réaction d'inertie, d'intensité et de sens variables, résultant des variations de vitesse;

2°) Nous admettons que la jante du volant est homogène sur toute sa circonférence, c'est-à-dire que les assemblages, robustes et bien construits, ont même résistance et même raideur que la jante. Leur influence sous la déformation de la jante et des bras est ainsi inappréciable. Nous négligeons les effets locaux que créent dans certains types de volant une variation de section aux assemblages : la jante est supposée de section constante sur toute la circonférence ;

3°) Nous supposons, enfin, que la figure élastique de déformation de la jante est sensiblement une circonférence de cercle. Si les bras n'existaient pas, cette hypothèse serait d'une exactitude absolue : l'effet de la force centrifuge sur la jante est analogue à celui que produit la pression d'un fluide sur une enveloppe pressée intérieurement. En réalité, les bras, par leur résistance à l'extension, contrarient cette tendance. Entre les bras, la force centrifuge agit comme sur une poutre encastree aux extrémités et y produit la flexion. La jante se déforme donc en une série de lobes continus, dont la convexité est tournée vers l'intérieur. Il en résulte des sollicitations complexes de la jante et des bras.

(1) Généralisation de la méthode donnée par M. UNWIN : *Elements of machine design*. London, 1897.

Dans les calculs suivants, nous employerons les notations ci-après (fig. 8) :

- R rayon moyen du volant ;  
 l longueur du bras, distance de centre à centre des assemblages à la jante et au moyeu ;  
 r rayon du moyeu compté jusqu'au centre de l'assemblage du bras ;  
 $2\alpha$  angle de deux bras consécutifs ;

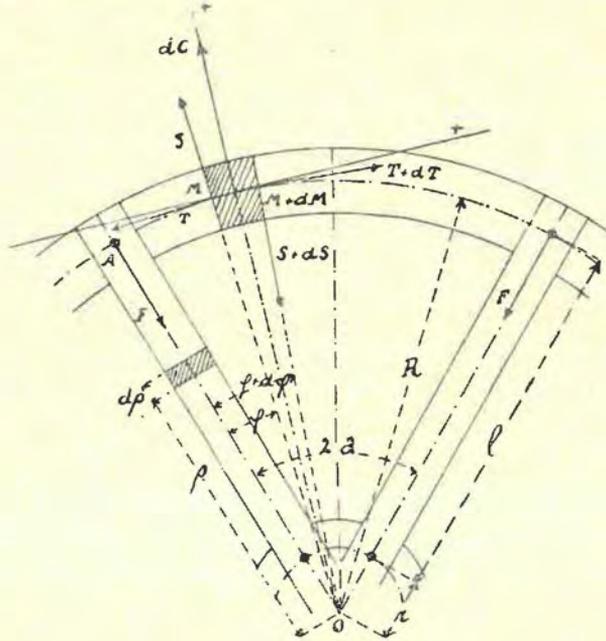


FIG. 8.

- A section de la jante (supposée uniforme) ;  
 A<sub>1</sub> section d'un bras ( id. id. voir note page 35) ;  
 G poids spécifique du métal de la jante ;  
 G<sub>1</sub> id. id. id. des bras ;  
 E coefficient d'élasticité de la jante ;  
 E<sub>1</sub> id. id. des bras ;  
 ω vitesse angulaire du volant (constante) ;  
 v vitesse linéaire à la circonférence moyenne du volant (constante) ;  
 g constante gravifique.

Considérons un prisme élémentaire de la jante compris entre deux sections radiales faisant respectivement avec l'axe du bras A pris pour origine, un angle  $\varphi$  et  $(\varphi + d\varphi)$ .

Ce prisme est soumis à une force centrifuge :

$$dC = \frac{G}{g} ARd\varphi. \quad \frac{v^2}{R} = \frac{G}{g} Av^2d\varphi.$$

Nous pouvons composer les tensions élémentaires développées dans chacune des sections  $\varphi$  et  $(\varphi + d\varphi)$  en un couple de moment M et  $(M + dM)$ , et en une résultante située par raison de symétrie dans le plan moyen du volant, que nous décomposerons suivant le rayon et la tangente, en une force tangentielle à la section S et  $(S + dS)$ , et une force normale à la section T et  $(T + dT)$ .

Le prisme élémentaire est en équilibre sous l'action de ces forces et de dC.

Ecrivons les équations d'équilibre en adoptant pour axes coordonnés le rayon moyen du prisme et la tangente, au point où ce rayon rencontre la circonférence moyenne de la jante.

En négligeant les infiniment petits du second ordre, et en remarquant que :

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2} \qquad \cos \frac{d\varphi}{2} = 1.$$

$$\frac{G}{g} Av^2d\varphi - Td\varphi - dS = 0. \qquad (1)$$

$$dT - Sd\varphi = 0 \qquad (2)$$

Prenant les moments par rapport au centre O :

$$dM - RdT = 0 \qquad (3)$$

Pour arriver à connaître les valeurs de S, T et M en fonction de  $\varphi$ , il faut intégrer et déterminer les constantes d'intégration :

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{dS}{d\varphi} = -T + \frac{G}{g} Av^2. \qquad (1bis)$$

Différentions par rapport à  $\varphi$  :

$$\frac{d^2S}{d\varphi^2} = -\frac{dT}{d\varphi}$$

Mais (2) :

$$\frac{dT}{d\varphi} = S$$

D'où :

$$\frac{d^2S}{d\varphi^2} + S = 0$$

Posons :

$$\frac{dS}{d\varphi} = p$$

$$\frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{dp}{d\varphi} = \frac{dp}{dS} \cdot \frac{dS}{d\varphi} = p \frac{dp}{dS}$$

D'où :

$$p dp + S dS = 0$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{S^2}{2} + \frac{C}{2}$$

$$p = \pm \sqrt{C - S^2}$$

Conséquemment :

$$\frac{dS}{d\varphi} = \pm \sqrt{C - S^2}$$

$$\frac{dS}{\pm \sqrt{C - S^2}} = d\varphi$$

Intégrons :

$$\varphi + C_1 = \pm \operatorname{arc} \sin \frac{S}{\sqrt{C}}$$

$$S = \sqrt{C} (\sin \varphi \cos C_1 \pm \cos \varphi \sin C_1)$$

du type

$$S = a \sin \varphi + b \cos \varphi \quad (4)$$

D'où pour :

$$\varphi = 0 \quad S_0 = b$$

$$\varphi = 2x \quad S_{2x} = a \sin 2x + b \cos 2x$$

Mais par symétrie, tous les bras étant identiques :

$$S_0 = - S_2\alpha$$

Ces forces sont égales chacune à la moitié de la force totale  $-F$ , réaction du bras sur la jante :

$$S_0 = -\frac{F}{2} = b \quad (5)$$

$$S_2\alpha = \frac{F}{2} = a \sin 2\alpha - \frac{F}{2} \cos 2\alpha$$

D'où 
$$a = \frac{F}{2tg\alpha} \quad (6)$$

On obtient en substituant dans (4) :

$$S = -\frac{F}{2} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$$

Pour	$\varphi = 0$	$S = -\frac{F}{2}$
	$\varphi = \alpha$	0
	$\varphi = 2\alpha$	$+\frac{F}{2}$

Etablissons maintenant l'expression de T. (4) donne par différentiation :

$$\frac{dS}{d\varphi} = a \cos \varphi - b \sin \varphi$$

Remplaçant  $a$  et  $b$  par leurs valeurs :

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{F \cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$$

Introduisant dans (1bis), il vient :

$$T = \frac{G}{g} Av^2 - \frac{F}{2} \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \quad (7)$$

Pour	$\varphi = 0$	$T = \frac{G}{g} Av^2 - \frac{F}{2tg\alpha}$
	$\varphi = \alpha$	$\frac{G}{g} Av^2 - \frac{F}{2 \sin \alpha}$
	$\varphi = 2\alpha$	$\frac{G}{g} Av^2 - \frac{F}{2tg\alpha}$

Etablissons enfin l'expression de M. — L'intégration de (3) donne :

$$M = RT + C_2$$

$$M = \frac{G}{g} ARv^2 - \frac{FR \cos(\alpha - \varphi)}{2 \sin \alpha} + C_2 \quad (8)$$

Pour déterminer  $C_2$ , nous remarquons que pendant la déformation élastique, l'angle au centre de l'arc ne varie pas.

Une formule bien connue (\*) donne la relation :

$$\int_0^{2\alpha} \frac{M}{EI} R d\varphi = 0$$

(\*) Dans le cas d'une pièce courbe, dont les rayons de courbure sont respectivement avant et après déformation  $\rho'$  et  $\rho$ , on a entre ces rayons, le moment fléchissant M, le coefficient d'élasticité E et le moment I d'inertie, la relation :

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

sur une longueur d'arc  $ds$ , mesurée avant et après déformation :

$$ds = \rho' d\varphi'$$

$$ds = \rho d\varphi$$

substituant :

$$\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{EI}{M}$$

Par intégration :

$$\varphi' - \varphi = \int_s^s \frac{M}{EI} ds$$

Si l'angle au centre reste constant  $\varphi' - \varphi = 0 = \int_s^s \frac{M}{EI} ds$

Dans le cas présent :

$$s = R\varphi \quad ds = R d\varphi$$

et  $\varphi$  varie de 0 à  $2\alpha$ .

Remplaçons M par sa valeur (8), on trouvera :

$$C_2 = -\frac{G}{g} ARv + \frac{FR}{2\alpha} \quad (9)$$

D'où finalement :

$$M = \frac{FR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right) \quad (10)$$

Pour	$\varphi = 0$	$M = \frac{FR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$
	$\varphi = \alpha$	$= \frac{FR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right)$
	$\varphi = 2\alpha$	$\frac{FR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$

Pour connaître complètement S, T et M, il faut encore déterminer la réaction F du bras.

Nous nous baserons pour rechercher cette valeur sur ce que l'allongement d'un bras sous l'action de la force centrifuge agissant suivant son axe, doit correspondre à l'allongement de la circonférence moyenne du volant résultant de la dilatation qu'y produisent les tractions T.

Recherchons d'abord l'allongement du bras.

Le bras est soumis dans une section normale, à la traction F et à sa force centrifuge propre, qui s'ajoute à cette traction.

Considérons un prisme élémentaire  $dA_1 d\rho$  situé à la distance  $\rho$  du centre. Son poids est :

$$G_1 A_1 d\rho \quad (*)$$

sa vitesse :

$$v \frac{\rho}{R}$$

(\*) Dans les calculs suivants, nous supposerons  $A_1$  constante, c'est-à-dire que le bras est de section uniforme. Dans certains types  $A_1$  varie et est fonction de  $\rho$ . Mais cette variation est généralement faible, et on peut dans ce cas supposer sans grande erreur  $A_1$  constante et égale à la section moyenne du bras.

sa force centrifuge est donc :

$$dC_1 = \frac{G_1 A_1 d\rho}{g} \frac{\left(\frac{v\rho}{R}\right)^2}{\rho} = \frac{G_1 A_1}{g} \frac{v^2 \rho}{R^2} d\rho$$

Sur cet élément agit la force F et la force centrifuge C<sub>1</sub> de la partie du bras comprise entre cette section et l'extrémité A.

$$\begin{aligned} F + C_1 &= \int_{\rho}^{r+l} \frac{G_1}{g} A_1 \frac{v^2 \rho}{R^2} d\rho + F \\ &= \frac{G_1}{g} A_1 \frac{v^2}{2R^2} [(r+l)^2 - \rho^2] + F \quad (11) \end{aligned}$$

Sous l'action de cette traction, le prisme élémentaire s'allonge. Cet allongement sur le bras entier est :

$$\begin{aligned} \Delta R &= \int_r^{r+l} \frac{G_1}{g} A_1 \frac{v^2}{2R^2} [(r+l)^2 - \rho^2] \frac{d\rho}{A_1 E_1} + \int_r^{r+l} \frac{F d\rho}{A_1 E_1} \\ &= \frac{G_1 v^2}{g E_1} \frac{l}{3} \left[ \left(\frac{l}{R}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{lr}{R^2} \right] + \frac{Fl}{A_1 E_1} \quad (12) \end{aligned}$$

Calculons d'autre part l'allongement que subit la jante sous l'action des tractions T. Nous évaluerons cette quantité sur l'arc compris entre deux bras, dont l'angle au centre est 2 $\alpha$ .

$$\Delta (2R\alpha) = 2 \int_0^{\alpha} \frac{TR d\varphi}{AE}$$

2 $\alpha$  étant constant :

$$\Delta (2R\alpha) = 2\alpha \Delta R$$

$$\Delta R = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{TR d\varphi}{AE} = \frac{R}{E} \left( \frac{G}{g} v^2 - \frac{F}{2A\alpha} \right) \quad (13)$$

Egalant (12) et (13), on a finalement :

$$F = \frac{v^2}{g} \frac{\frac{GR}{E} - \frac{G_1 l}{3E_1} \left[ \left( \frac{l}{R} \right)^2 + \frac{3 l r}{2 R^2} \right]}{\frac{l}{A_1 E_1} + \frac{R}{2A\alpha E}} \quad (14)$$

Si le volant est homogène :

$$G = G_1 \quad E = E_1$$

et vu les valeurs relatives de  $r$  à  $l$  et  $R$ , on peut écrire sans grande erreur,

$$r = 0 \quad l = R$$

Alors :

$$F = \frac{2}{3} \frac{G}{g} v^2 \frac{2A_1 A \alpha}{2A\alpha + A_1} \quad (14bis)$$

On retombe ainsi sur la formule d'Unwin.

Dans le cas que nous avons examiné, nous avons fait ces mêmes hypothèses, sauf la première, les poids spécifiques de la jante et des bras étant différents :

$$F = \frac{2}{3} \frac{v^2}{g} (3G - G_1) \frac{AA_1\alpha}{2A\alpha + A_1}$$

