MÉMOIRES

CALCUL DE LA PERTE DE CHARGE

DANS LES

CANALISATIONS D'AIR COMPRIMÉ

PAR

A. HALLEUX

Ingénieur au corps des mines à Bruxelles

Ingénieur électricien

[53316]

Contrairement à l'opinion admise par certains ingénieurs et aux affirmations que l'on rencontre dans des publications didactiques, il est encore des applications où l'air comprimé est le meilleur agent de transmission d'énergie.

Il ne faut pas se hâter, comme le font fréquemment nos confrères électriciens, de condamner l'air comprimé à cause du faible rendement qu'il donnait il y a dix ou quinze ans, oubliant qu'on a fait des progrès sérieux dans la construction des compresseurs et que les chiffres plus ou moins exacts qui ont jadis servis de base à leur opinion, ne sont plus vrais actuellement.

Au surplus, ce n'est là qu'un côté de la question, et d'autres éléments que le rendement doivent intervenir dans un parallèle impartial entre les modes de transmission d'énergie (1).

Quoi qu'il en soit, nous ne citerons, comme preuve à l'appui de la vogue dont jouit encore l'air comprimé, que

(1) Nous développerons ce sujet, en ce qui regarde les mines, dans un prochain article.

l'existence d'ateliers de compression d'air dans les charbonnages importants des bassins belges et français et, notamment, dans nombre de charbonnages du Donetz, dont les installations viennent pour ainsi dire d'être conçues par des techniciens expérimentés de notre pays.

Nous pensons donc que, indépendamment de l'intérêt scientifique, il y a une importance pratique réelle à pouvoir calculer exactement la perte de charge dans une canalisation d'air comprimé, ou mieux, à pouvoir déterminer, pour une perte de charge donnée, le diamètre de canalisation pour une puissance quelconque à transmettre.

Nous croyons avoir étudié la question d'une manière nouvelle et, en nous appuyant sur la thermodynamique, être arrivé à une formule exacte.

Jusqu'à présent, toutes les formules utilisées ou proposées pour calculer la perte de charge sont des formules empiriques.

Stockalper, expérimentant sur les conduites amenant l'air comprimé aux machines utilisées pour le percement du Gothard, avait conclu que la formule de Darcy relative à l'écoulement de l'eau était celle qui, appliquée à l'écoulement de l'air, concordait le mieux avec les résultats observés [1].

Darcy avait trouvé pour les conduites d'eau :

$$(1) \qquad J = 3{,}2423\, b\, \frac{Q^2}{D^5}$$

où J est la perte de charge par mètre courant ;

b, un coëfficient valant $0{,}000507 + \dfrac{0{,}00001294}{D}$

Q, le volume s'écoulant par seconde en m^3 ;

et, il avait calculé les valeurs de $\dfrac{J}{Q^2}$ pour différents dia-

(1) Voir *Revue universelle des mines*, 2me série, t. VII, 1880.

mètres et consigné ces résultats en une table ; on tire en effet de la formule (1) :

$$\frac{J}{Q^2} = 3{,}2423.\ \frac{b}{D^5}$$

Pour être complet et éviter des recherches au lecteur, nous reproduisons ci-dessous cette table :

DIAMÈTRE (mètres)	$\frac{J}{Q^2}$	DIAMÈTRE (mètres)	$\frac{J}{Q^2}$
0,050	7945,5	0,275	1,1419
0,055	4711,2	0,300	0,7339
0,060	3012,8	0,325	0,4889
0,065	1972,7	0,350	0,3357
0,070	1334,4	0,375	0,2367
0,075	928,31	0,400	0,17075
0,080	661,65	0,425	0,12565
0,085	481,60	0,450	0,09412
0,090	357,26	0,475	0,07162
0,095	269,45	0,500	0,05528
0,100	206,12	0,550	0,03417
0,125	64,847	0,600	0,02203
0,150	25,326	0,650	0,01472
0.175	11,473	0,700	0,010135
0,200	5,791	0,750	0,007161
0,225	3,173	0,800	0,005175
0,250	1,8548		

Pour une conduite de longueur L, la perte de charge est ainsi donnée par :

$$\text{(2)} \qquad \lambda = \mathrm{L\,J} = \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Q}^2}\right).\ \mathrm{Q^2L}.$$

$\frac{J}{Q^2}$ se cherche dans la table quand le diamètre est donné, et Q est le volume qui passe par seconde.

Pour appliquer cette formule (2) à l'air, il suffit de multiplier le second membre par le poids spécifique de l'air qui circule et l'on a la perte de charge en kilogrammes par mètre carré.

Stockalper proposait donc d'utiliser dans ces conditions la formule de Darcy, en prenant toutefois la densité et le volume moyens de l'air circulant dans la conduite. Nous aurons l'occasion de signaler plus loin la comparaison des résultats donnés par la formule et par l'observation directe.

A la suite d'expériences faites à Paris sur les réseaux de la distribution d'énergie de la Société Popp, M. le professeur Riedler (1) proposait la formule suivante :

$$Z = 0{,}000533\, \gamma \frac{l}{d} v^2$$

où Z est la perte de charge en kilog. par mètre carré ;
l, la longueur de la conduite en mètres ;
d, le diamètre en mètres ;
v, la vitesse de l'air en mètres dans la conduite ;
et γ, le poids moyen d'un mètre cube d'air comprimé.

Cette formule doit conduire, comme on le voit, à des résultats environ moitié moindres que celle de Darcy, préconisée, ainsi que nous l'avons vu plus haut, par Stockalper.

Dans les deux formules qui précèdent, on doit connaître les vitesse et densité moyennes pour calculer la perte de charge. Or, si l'on peut considérer ces éléments comme à peu près constants pour de petites canalisations, il n'en est plus de même pour des canalisations importantes. Il faut alors les calculer en se servant de la pression moyenne, qui est $\dfrac{p_1 + p_2}{2}$

(1) Voir *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, février 1891.

si p_1 est la pression initiale et p_2 la pression finale; et, la pression finale est précisément inconnue.

C'est pourquoi M. le professeur Dechamps a modifié la formule de Darcy de manière à n'y laisser subsister que des données du problème (1) et il arrive à cette formule :

$$J_1 = \frac{\alpha\pi_t u^2 L}{1 + \frac{\alpha\pi_t}{2} u^2.L} .P_1$$

où J_1 est la perte de charge en atmosphères ;

L, la longueur en mètres de la conduite ;

v, la vitesse de l'air en mètres ;

π_t, le poids d'un mètre cube d'air à la pression atmosphérique moyenne et à la température t,

et
$$\alpha = \frac{2\left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}\right)}{10333 \,.\, D}$$

M. Kraft; ingénieur en chef à la Société Cockerill, a également cherché à modifier la formule de Darcy pour en permettre l'application sans tenir compte de la pression moyenne (2) en procédant comme suit :

Pour une longueur infiniment petite, dl, de la conduite, la perte de charge sera, d'après la formule de Darcy :

$$dp = -A.Q^2\gamma dl,$$

A étant le terme $\frac{J}{Q^2}$ des tables de Darcy.

(1) Voir *Revue universelle des mines*, IIIme série, t. VIII.

(2) Voir Bulletins nos 5, 6 et 7, tome II, 2me série, de l'Association des ingénieurs électriciens sortis de l'Institut Montéfiore. — MAURICE BAYET : Comparaison entre l'air comprimé et l'électricité.

On a, si P_1 est la pression initiale, p la pression qui règne à la longueur l, dont l'accroissement dl est considéré,

$$Q_1P_1 = Qp$$

$$Q = \frac{Q_1P_1}{p}$$

$$\gamma = \gamma_1 \frac{p}{P_1}$$

d'où

$$dp = -A.Q_1^2\frac{P_1}{p}.\gamma_1 dl$$

$$pdp = -A.Q_1^2P_1.\gamma_1.dl$$

en intégrant

$$\frac{P_2^2}{2} = -A\,Q_1^2P_1\gamma.L + \frac{P_1^2}{2}$$

D'où la perte de charge

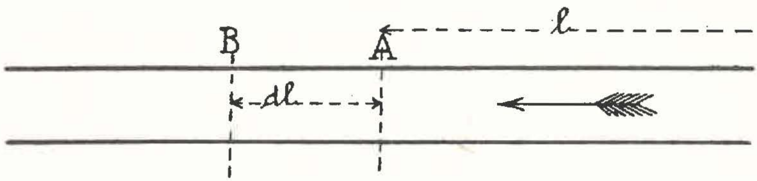
$$P_1 - P_2 = P_1\left[1 - \sqrt{1 - 2A.Q_1^2\,\frac{\gamma_1}{P_1}L.}\right]$$

Remarquons que les pertes de charges auxquelles on arrive en appliquant les deux dernières formules dont il vient d'être question diffèrent peu de celles que donne la formule de Darcy dont elles découlent.

Ceci dit, exposons comment nous établissons la formule rationnelle :

Soit une conduite d'un diamètre D mètres, de section S mètres carrés et de longueur L mètres, dans laquelle il passe par seconde en chaque section un poids d'air P kilogrammes.

Etudions le mouvement entre deux sections infiniment voisines A et B et distantes de dl.



Soit en A :

V la vitesse de l'air en mètres par seconde ;
p sa pression en kilogrammes par mètre carré;
v le volume d'un kilogramme d'air ;

en B nous avons respectivement $V+dV$, $p+dp$, $v+dv$ pour les mêmes éléments.

Cherchons l'équation du mouvement du fluide entre les deux sections infiniment voisines considérées, mouvement qui a lieu pendant un infiniment petit de temps dt.

Si nous appelons dq la quantité de chaleur fournie au gaz dans son parcours de A à B, A_1 l'équivalent mécanique de la chaleur, nous devons écrire en vertu du principe de la conservation de l'énergie, que :

(1) Travail moteur = Travail résistant + Variation de force vive + Variation d'énergie interne + Travail des frottements.

Le travail moteur est $\frac{dq}{A_1} + p.\ S.\ Vdt$;

Le travail résistant est $(p+dp)\ S.\ (V+dV)\ dt$;

Le travail des frottements dépend d'un coëfficient de frottement que nous appellerons C (air sur fer); pour des vitesses relativement faibles telles que celles auxquelles on a affaire dans les canalisations d'air comprimé, on peut écrire :

$$\text{travail des frottements} = C\frac{Pdt}{g}\ \frac{V^2}{D}.dl.\ (^1)$$

ou $g = 9{,}8088$.

La variation de force vive est :

$$\frac{1}{2}.\frac{Pdt}{g}\left\{(V+dV)^2 - V^2\right\} = \frac{Pdt}{g}V\,dV.$$

La variation d'énergie interne dU est reliée à la chaleur fournie au gaz par l'équation de thermodynamique connue

$$dq = A\,[dU + p.\ Pdt\ .dv]$$

Remarquons avant de remplacer dans l'équation (1) que pratiquement, ainsi qu'il résulte de diverses expériences et notamment de celles de Stockalper, la température du fluide qui s'écoule peut être considérée comme constante, de sorte que si T est la température constante absolue du fluide, on a

$$pv = RT = \text{Constante}\ (2)$$

où R est la constante de Gay-Lussac : 29,27 pour l'air. Cela étant, l'équation (1) devient après substitution et réductions effectuées en tenant compte de (2)

$$(3)\qquad p\,dv = \frac{V\,dV}{g} + \frac{C}{D}.\frac{dl}{g}V^2$$

---

(1) Pour être mathématiquement exact, il faut ici au lieu de V^2 :

$$\left(\frac{V + dV + V}{2}\right)^2;$$

nous négligeons en n'adoptant point cette forme, des infiniments petits du 2me ordre.

C étant une constante numérique, cette équation est homogène [1].

Pour intégrer observons que :

$$V\,S = P.\,v \quad \therefore \quad S\,dV = P.\,dv$$
$$p\,v = R\,T \quad \therefore \quad p\,dv + v\,dp = o$$

Nous avons :

$$R\,T.\,\frac{dv}{v} = \frac{P^2\,v.\,dv}{g.\,S^2} + \frac{C.\,dl.\,P^2\,v^2}{D.\,g.\,S^2}$$

ou

$$dl = \frac{R\,T.\,D}{C.\,P^2}\,g.\,S^2\,\frac{dv}{v^3} - \frac{D}{C}\,\frac{dv}{v}$$

En intégrant o et L et en tenant compte des équations ci-dessus, il vient :

$$(4)\quad L = \frac{D}{C}\left[log_n\frac{p_2}{p_1} - \frac{S^2.\,g}{2.\,P^2\,R.\,T}\,(p_2^2 - p_1^2)\right] + Const^{te}$$

La constante d'intégration est nulle.

Telle est la formule (4) qui donne la relation existant entre les éléments connus du problème et p_2, pression *inconnue* à l'extrémité de la conduite (p_1 étant la pression originelle).

De cette équation on peut tirer p_2, d'où $p_1 - p_2$ la perte de charge cherchée.

---

(1) En fonctions des unités fondamentales de masse (M), longueur (L) et temps (T), nous avons pour équations de dimensions :

p .... $M\,L^{-1}\,T^{-2}$	g .... LT^{-2}
V et dV ... LT^{-1}	D et dl L
v .... $L^2\,M^{-1}\,T^2$	

En remplaçant dans (3)

$$M\,L^{-1}\,T^{-2}\,L^2\,M^{-1}\,T^2 = \frac{L^2\,T^{-2}}{L.\,T^{-2}} + \frac{C}{L}\,\frac{L}{L\,T^{-2}}\cdot L^2\,T^{-2}$$

$$L = L + CL$$

Pour pouvoir utiliser la formule (4) trouvée, il est nécessaire de déterminer la valeur de C, constante de frottement.

Les expériences de Stockalper, faites avec grand soin, sur des canalisations de 4600 et 522 mètres [1] de longueur nous ont permis, puisque la perte de charge a été mesurée, de calculer la valeur de C valeur qui tirée, de l'équation (4) s'exprime par

$$C = \frac{D}{L}\left[log_n \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2} g . \frac{S^2}{P^2 . R T}\left[p_2^2 - p_1^2 \right]\right]$$

Le tableau ci-contre donne les valeurs de C correspondantes aux diverses expériences de Stockalper :

Nos	L mètres	D mètres	p_1 atmosp.	p_2 atmosp	T	P (k)	C
1	4600	0,20	5,60	5,24	294	1,2012	0,007095
2	4600	0,20	4,35	4,13	294	0,8055	0,007499
3	4600	0,20	3,84	3,65	294	0,67236	0,008217
4	522	0,15	5,24	5,00	299,5	1,2012	0,008907
5	522	0,15	4,13	4,06	299,5	0,8055	0,00462
6	522	0,15	3,65	3,545	299,5	0,67236	0,00874

On remarque la concordance des valeur des C données par les expériences 1, 2, 3, 4 et 6; l'expérience 5 paraît entachée d'erreur d'observation, ainsi que Stockalper lui même le fait remarquer dans son mémoire. Cependant, nous ne croyons pas avoir le droit d'écarter les résultats d'une expérience, parce que le nombre d'essais dont nous

(1) Voir le numéro cité de la *Revue universelle des Mines*.

disposons est trop faible et que chacun de ces essais comporte certaines erreurs d'observations [1].

Nous adopterons donc pour C la valeur moyenne fournie par la combinaison des 6 expériences. Cette valeur moyenne est $C = 0{,}0075$.

Cela étant, si nous remarquons que dans la formule (4) le terme $l\,\frac{p_2}{p_1}$ est très petit (puisque p_2 diffère peu de p_1), par rapport à l'autre terme et peut même être négligé vis-à-vis de celui-ci [2], nous pouvons tirer :

$$(5) \qquad p_2 = \sqrt{p_1^2 - \frac{2\,C.\,L\,P^2\,R\,T}{D.\,g.\,S^2}}$$

formule que nous proposons et qui donne la tension à l'extrémité de la conduite en fonction d'éléments connus.

Appliquons cette formule aux essais du Gothard nos 1, 2, 3 qui concernent la canalisation la plus longue et comparons les résultats qu'elle donne avec ceux qui sont fournis par les formules de Stockalper (Darcy) et de M. Riedler.

Numéro des essais	PERTES DE CHARGES			
	calculées			directement observées
	Formule de Darcy	Formule de M. Riedler	Formule proposée	
1	0,57	0,267	0,39	0,36
2	0,32	0,15	0,22	0,22
3	0,25	0,12	0,17	0,19

(1) On peut différer de manière de voir et adopter la valeur moyenne déduite des expériences no 1, 2, 3, 4 et 6 seulement.

(2) Pour $p_1 = 5{,}66$; $p_2 = 5{,}24$, on a $\log_n \frac{p_2}{p_1} = -0{,}076893$; l'autre terme a pour valeur (si $D = 0{,}20$ et $P = 1$ k 2012) : 163,268.

Dans la publication *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, numéro cité, on trouve les constatations faites lors des expériences qui ont eu lieu sur les canalisations de Paris.

Mais, M. M. Bayet [1] fait remarquer, avec raison, pensons-nous, qu'il ne pouvait être question de faire sur ces installations des expériences précises. Quoi qu'il en soit, nous appliquons notre formule aux deux essais qui ont le plus de chances d'être non entachés d'erreurs d'observation importantes, les données sont :

(1)	$L = 3340$ m.	et (2)	$L = 3340$
	$D = 0{,}30$		$D = 0{,}30$
	$p_1 = 7$ atm.		$p_1 = 7.33$
	$p_2 = 6{,}84$ atm.		$p_2 = 7{,}29$
	$P = 3$ k. 792		$P = 2{,}739$
	$T = 288^\circ$ (?)		$T = 288$ (?)

et nous obtenons par le calcul

$$p_2 = 6{,}63 \qquad \text{et} \qquad p_2 = 7{,}186$$

Nous n'avons malheureusement pas à notre disposition d'autres résultats d'essais qui nous permettraient de vérifier l'exactitude de la formule que nous proposons. Nous estimons cependant, qu'elle peut être adoptée par ceux qui s'occupent de la question, parce qu'elle n'est pas établie empiriquement et qu'elle est d'accord avec les expériences sur la perte de charge les mieux faites jusqu'à présent.

Nous avons dressé le tableau reproduit ci-dessous qui, croyons nous, pourra rendre des services pratiques ; ce tableau donne pour une pression effective de 5 atmosphères à l'extrémité de la conduite, le poids d'air par seconde qui doit circuler pour que la perte de charge prévue ne soit pas dépassée.

(1) Bulletin de l'*Association des Ingénieurs électriciens* sortis de l'Institut Montéfiore, cité plus haut.

Ce poids est calculé par la formule :

$$P = S \times 10333 \sqrt{\frac{D.\ g.\ (p_1 + p_2)\ (p_1 - p_2)}{2\ C.\ L.\ R\ T}}$$

qui découle directement de (5), où p_1 et p_2 sont exprimés en atmosphères et où T a été supposé égal à 293°.

Données	Longueur L (*m*) .	500	1000	1500	1500	1500
	Diamètre D (*m*) .	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	Perte de ch. (*atm.*)	0,25	0,50	0,50	0,75	1,00
Poids P (*k*)		0,09802	0,0986	0,0807	0,0977	0,1165

Données	Longueur L (*m*(.	500	500	1000	1000	1500	2000	3000
	Dlamètre D (*m*) .	0,075	0,075	0,075	0,075	1,075	0,075	0,075
	Perte de ch. (*atm.*)	0,25	0,50	0,25	0,50	0,50	0,50	0,50
Poids P (*k*)		0,2701	0,3859	0,1911	0,2729	0,2228	0,1930	0,1576

Données	Longueur L (*m*) .	500	500	1000	1000	1500	2000	3000
	Diamètre D (*m*) .	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
	Perte de ch. (*atm.*)	0,25	0.50	0,25	0,50	0,50	0,50	0,50
Poids P (*k*)		0,5578	0,7960	0,4036	0,5629	0,4598	0,3980	0,3249

Données	Longueur L (*m*) .	500	500	1000	1000	2000	2000	4000
	Diamètre D (*m*). .	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
	Perte de ch. (*atm.*)	0,25	0,50	0,25	0,50	0,25	0,50	0,50
Poids P (*k*) . .		0,9687	1,383	0,6849	0,9785	0,4843	0,6919	0,4893

Ainsi qu'on a pu le remarquer, la formule que nous avons établie ne s'applique qu'aux canalisations horizontales; lorsque l'air circule dans une *conduite verticale,* il convient d'introduire le travail élémentaire de la pesanteur dans notre équation fondamentale, laquelle devient :

$$\mathrm{P}.\, dt.\, dl + \frac{dq}{\mathrm{A}} + \mathrm{S}\, p.\, \mathrm{V}\, dt = [p + dp]\,[V + d\mathrm{V}]\,\mathrm{S}.\, dt$$

$$+ \mathrm{C}.\, \frac{\mathrm{P}dt.}{\mathrm{D}.g.}\, \mathrm{V}^2.\, dl + .\mathrm{P}.\, \frac{\mathrm{V}.\, d\mathrm{V}}{g}\, dt + d\mathrm{V}$$

En remarquant que $pv = \mathrm{RT} = \mathrm{Constante}$

on obtient tous calculs faits :

$$dl + pdv = \frac{\mathrm{C}.\, \mathrm{V}^2\, dl}{\mathrm{D}.\, g} + \frac{\mathrm{V}.\, d\mathrm{V}}{g}. \text{ (1)}$$

équation qui est aussi homogène.

Comme on a

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{P}\, v}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}.\frac{\mathrm{R\,T}}{p}$$

$$\text{et } v = \frac{\mathrm{RT}}{p}$$

on arrive, toutes réductions opérées, à

$$dl = \mathrm{D\,R\,T.\,S}^2.\, g.\, \frac{p\, dp.}{\mathrm{D}\, g.\, \mathrm{S}^2 p^2 - \mathrm{C}.\, \mathrm{P}^2\, \mathrm{R}^2\, \mathrm{T}^2}$$

$$- \mathrm{D}.\, \mathrm{P}^2\, \mathrm{R}^2\, \mathrm{T}^2 \frac{dp}{[\mathrm{D}.\, g.\, \mathrm{S}^2 p^2 - \mathrm{C}.\, \mathrm{P}^2\, \mathrm{R}^2\, \mathrm{T}^2]\, p}$$

---

(1) Dans le cas d'une canalisation inclinée d'un angle α sur l'horizon, on aurait

$$dl \sin \alpha + pdv = \frac{\mathrm{C\,V}^2\; dl}{\mathrm{D}g} + \frac{\mathrm{V}\, d\,\mathrm{V}}{g}$$

ou en intégrant

$$L = D\,R\,T\,S^2\,g.\int_{p_1}^{p_2}\frac{p\,dp}{Dg\,s^2\,p^2 - C\,P^2\,R^2\,T^2}$$

$$- D\,P^3\,R^2\,T^2.\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{[Dg\,S^2\,p^2 - CP^2\,R^2\,T^2]\,p}$$

On a

$$\int_{p_1}^{p^2}\frac{pdp}{DgS^2p^2 - CP^2R^2T^2} = \left\{\frac{1}{2DgS^2}\,log_n\,(DgS^2p^2 - CP^2R^2T^2)\right\}_{p_1}^{p^2}$$

$$= \frac{1}{2DgS^2}\,log_n\,\frac{DgS^2p_2^2 - CP^2R^2T^2}{DgS^2p_1^2 - CP^2R^2T^2}$$

et $$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{(DgS^2p^2 - C.P^2R^2T^2)\,p} = \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{(ap^2 - b)\,p}$$

en posant $\left\{\begin{array}{l} a = D.g.S^2 \\ b = C.P^2.R^2.T^2 \end{array}\right.$

Pour intrégrer mettons sous la forme :

$$\frac{1}{[\,ap^2 - b\,]\,p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - \sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{C}{p + \sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

$$1 = A\,[ap^2 - b] + Bp\left[p + \sqrt{\frac{b}{a}}\right]a + Cp\left[p - \sqrt{\frac{b}{a}}\right]a$$

On tire de cette équation :

$$A = -\frac{1}{b}$$

$$B = \frac{1}{2b}$$

$$C = -\frac{1}{2b}$$

donc

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{(ap^2 - b)\,p} = \int_{p_1}^{p_2} -\frac{1}{b} \cdot \frac{dp}{p} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{2b} \cdot \frac{dp}{p - \sqrt{\frac{b}{a}}} - \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{2b} \cdot \frac{dp}{p + \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$= \left\{ -\, log_n \left[\frac{p_2}{p_1}\right] + \frac{1}{2}\, l \left[\frac{p_2 - \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] - \frac{1}{2}\, l \left[\frac{p_2 + \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \right\} \frac{1}{b}$$

$$= log_n \left\{ \frac{p_1}{p_2} \left[\cdot \left[\frac{p_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_2 + \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \left[\frac{p_2 - \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{b}}$$

Finalement :

$$L = log_n \left[\frac{p_2^2 - \frac{b}{a}}{p_1^2 - \frac{b}{a}}\right]^{\frac{RT}{2}} - \frac{b.D}{C}\, log_n \left\{ \frac{p_1}{p_2} \left[\cdot \left[\frac{p_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_2 + \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \left[\frac{p_2 - \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{b}}$$

$$(a)\ L = log_n \left\{ \left[\frac{p_2^2 - \frac{a}{b}}{p_1^2 - \frac{a}{b}}\right]^{\frac{RT}{2}} \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{p_2 + \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_1 + \sqrt{\frac{b}{a}}} \cdot \frac{p_1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}{p_2 - \sqrt{\frac{b}{a}}} \right]^{\frac{1}{2} \cdot \frac{D}{C}} \right\}$$

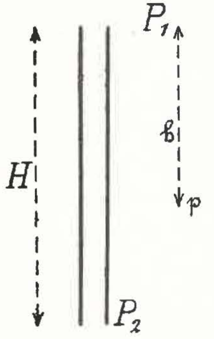
Ainsi qu'on peut le constater, il n'est pas possible de tirer p_2, l'inconnue en fonction des données du problème. On ne peut résoudre l'équation ci-dessus que par la méthode très longue des approximations avec substitutions successives lorsque les lettres sont remplacées par leurs valeurs numériques. Cette formule (a) ne peut donc, d'après nous, servir qu'à vérifier la valeur que l'on pourrait admettre pour p_2 en se basant sur une méthode approximative.

Dans les cas où la différence de niveau entre l'origine et l'extrémité de la conduite est faible par rapport au développement de celle-ci, nous proposons l'emploi pur et simple de la formule (5) laquelle ne conduira à *aucun mécompte*.

Si la différence de niveau est notable, on pourra selon l'importance de la transmission :

1° Employer encore la formule (5) comme dans le cas précédent : ce qui conduira à une valeur de la pression finale trop *faible* ;

2° Calculer *pour le tronçon vertical* la pression p_2 par la formule (5) et majorer cette valeur de l'augmentation de pression dûe à la différence de niveau — augmentation que l'on calculera en supposant le fluide à l'état statique [1]. —



(1) Ce calcul se fait comme suit :

Soit une conduite verticale de hauteur H; soit les tensions finale et initiale P_1 et P_2 : au niveau h, la tension est p ; on a en ce point : $dp = dh \times \delta_p$ ou δ_p est la densité du fluide à la tension de p kil. par m. c. Or $\delta_p = p\delta$, δ étant la densité pour une tension $= 1$. Donc $dp = dh \,.\, p\,\delta$, d'où

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dp}{p} = \int_0^H dh\,\delta \;\therefore\; l\left[\frac{P_2}{P_1}\right] = H.\delta. \quad \text{d'où} \quad \frac{P_2}{P_1} = e^{H\delta}$$

On obtiendra ainsi une valeur approximative de la pression à la partie inférieure du tronçon considéré, valeur qui servira de point de départ pour la recherche de la valeur exacte au moyen de la formule (a).

Bruxelles, décembre 1900.