MÉMOIRES

SUR UNE

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA

FRÉQUENCE DES DÉGAGEMENTS INSTANTANÉS DE GRISOU

PAR

J. BEAUPAIN

Ingénieur principal des Mines, Docteur ès-sciences.

AVEC UN AVANT-PROPOS

et un post-scriptum

DE

Em. HARZÉ

Directeur général des Mines.

[519 : 62281]

AVANT-PROPOS

La question du grisou dans ses rapports avec la météorologie endogène a donné lieu au sein de la *Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie* à un examen approfondi.

La publication des débats dans le bulletin de cette société m'a amené à produire un mémoire spécial ou plutôt une note complémentaire pour remettre la question au point (1).

Sans avoir à analyser ici ces documents, je rappellerai que les manifestations du grisou dans nos exploitations paraissent avoir une corrélation trop lointaine avec les phénomènes endogènes pour que l'on puisse espérer trouver dans l'étude de ceux-ci des éléments de sécurité dont pourraient bénéficier les mines grisouteuses.

Ceci dit, tout en reconnaissant l'intérêt scientifique qui s'attacherait à des observations sismiques bien organisées.

Les partisans de l'existence d'une corrélation manifeste entre les dégagements de grisou et les sismes ont tenté d'appuyer leur thèse en recherchant, parfois très au loin, des cas de coïncidence de faits plus ou moins bien établis, pouvant se rattacher à une cause générale.

Procédant dans un esprit rigide d'investigations sur des faits officiellement actés, j'ai de mon côté recherché si, au moins exceptionnellement, il n'y avait pas eu dans toute notre grande région houillère des cas de simultanéité, soit de dégagements instantanés de grisou, soit d'inflammations de ce gaz.

Voici les résultats de ces recherches :

Dans le cours de la période trentenaire 1869-1898 comportant neuf mille jours de travail, trois de ceux-ci ont été marqués par deux dégagements instantanés de grisou pour un total de deux cent trente-sept dégagements de l'espèce, ce qui ne veut pas dire que ces manifestations aient eu lieu à la même heure.

Quant aux accidents déterminés par l'inflammation du grisou et également enregistrés durant la même période, il ne s'en est jamais présenté deux le même jour.

Au sujet des trois cas de dégagements instantanés ci-dessus (dont d'ailleurs un douteux), j'ai voulu m'assurer si ce faible

(1) Du grisou dans ses rapports avec la météorologie endogène. Mémoire nº 2. Bruxelles, veuve Monnom.

nombre n'était pas autre chose que le résultat des *lois du hasard* pour me servir de l'expression d'un illustre savant (1).

C'est ainsi que j'ai été amené à soumettre les problèmes de probabilités suivants à M. J. Beaupain, ingénieur principal des mines, dont on connaît les beaux travaux en analyse supérieure.

Prémisse commune. — Une urne contient neuf mille numéros, et l'on opère des tirages successifs d'un seul numéro, en le réintégrant dans l'urne après chaque tirage.

1er problème. On demande combien il faut de tirages pour qu'il devienne probable qu'au moins un numéro non désigné (n'importe lequel) sorte au moins deux fois.

2e problème. On demande le nombre de tirages pour qu'il devienne probable qu'au moins deux numéros quelconques sortent au moins deux fois.

3e problème. On demande le nombre de tirages pour qu'il devienne probable qu'au moins trois numéros quelconques sortent au moins deux fois.

Les solutions de ces trois problèmes ont été respectivement les suivantes : 112, 175 et 222 tirages, tous nombres inférieurs à celui (237) des cas de dégagements instantanés de grisou.

Les rares cas de deux dégagements instantanés le même jour ne pouvaient donc appuyer la thèse d'une action commune endogène.

Les calculs qui ont donné ces solutions présentant de l'intérêt comme méthode employée et constituant une curieuse application des hautes mathématiques à une question d'ordre matériel, la Commission des *Annales des Mines* a cru pouvoir les insérer dans ce recueil.

Bruxelles, septembre 1899. Émile HARZÉ.

---

(1) J. Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de France.

CHAPITRE I

1. Problème. — Une urne renferme n numéros. On fait p tirages, et, après chaque tirage, on remet dans l'urne le numéro qu'on vient d'extraire. Quelle est la probabilité qu'au moins m numéros des p numéros sortis se présenteront, chacun, au moins deux fois [1]?

Le nombre des cas possibles est évidemment n^p. On sait que la somme des probabilités de deux événements contraires est égale à l'unité : pour plus de facilité nous chercherons la probabilité de l'événement contraire en calculant le nombre des cas défavorables à l'arrivée de l'événement attendu.

1° En p tirages, aucun numéro n'est sorti deux fois : le nombre de ces cas, que j'appellerai, N_0, est égal au nombre des arrangements de n objets, pris p à p, c'est-à-dire à

$$n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-p+1).$$

2° En p tirages, un numéro peut sortir i fois avec $p-i$ autres numéros, i étant au moins égal à 2. Choisissons un numéro quelconque, et, pour rendre notre raisonnement plus clair, nous supprimerons par la pensée ce numéro de l'urne. Formons les arrangements des $n-i$ numéros restants, $p-i$ à $p-i$; considérons l'un de ces arrangements, et imaginons un casier de p cases. Nous pourrons placer i fois le numéro supprimé dans i cases, et, cela, d'un nombre de manières égal à celui des combinaisons de p objets, i à i, c'est-à-dire $C_{p,i}$.

Cela fait, les $p-i$ autres numéros occuperont les cases restantes; mais, en les y plaçant, nous aurons soin de ne point déranger l'ordre de succession qu'ils présentent dans l'arrangement choisi. Il est visible que nous formerons de cette manière

$$(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots (n-p+i)\, C_{p,i}$$

dispositions qui contiendront, chacune, i fois le numéro supprimé

[1] On ne demande pas la probabilité d'extraire, au moins deux fois m numéros désignés; pour la réalisation de l'événement attendu, il suffit qu'au moins m numéros quelconques sortent au moins deux fois en p tirages.

et $p-i$ autres numéros. Or, ce que nous disons de ce numéro, nous pouvons le répéter pour chacun des n numéros. En conséquence, nous aurons, dans cette hypothèse,

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+i)\,C_{p,i},$$

ou

$$A_{n,\,p-i+1}\times C_{p,i}$$

cas défavorables.

Mais un numéro peut sortir deux fois, trois fois, ... p fois; par suite, si nous désignons par N_1 le nombre de ces événements, qui constituent le deuxième groupe, nous aurons

$$N_1=\sum_{i=2}^{i=p}A_{n,\,p-i+1}\times C_{p,i}.$$

3° Parmi les p numéros extraits, deux numéros se présentent, l'un, i_1 fois, l'autre, i_2 fois, avec $p-i_1-i_2$ autres numéros, i_1 et i_2 étant égaux ou supérieurs à 2.

Supposons que ces deux numéros ont été retirés de l'urne, et formons les arrangements des $n-2$ numéros restants, pris $p-i_1-i_2$ à $p-i_1-i_2$. Si nous prenons i_1 fois l'un des deux numéros supprimés, nous pourrons placer ces i_1 numéros dans i_1 cases, d'un nombre de manière égal à C_{p,i_1}; les $p-i_1$ cases vides seront remplies par le second numéro, répété i_2 fois, et, cela, d'un nombre de manières différentes égal à $C_{p-i_1,\,i_2}$; donc ces deux numéros, répétés, l'un, i_1 fois, l'autre, i_2 fois, occuperont i_1+i_2 cases, d'un nombre de façons distinctes égal à

$$C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,\,i_2}.$$

Dans les $p-i_1-i_2$ cases restantes, nous mettrons, de la manière indiquée ci-dessus, les $p-i_1-i_2$ numéros différents de chaque arrangement. Par suite, le nombre des cas défavorables sera

$$(n-2)(n-3)\ldots..(n-p+i_1+i_2-1)\,C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,\,i_2}.$$

Or nous pouvons former avec les n numéros $C_{n,2}$ groupes binaires; le nombre total des cas défavorables, correspondants à l'hypothèse admise, sera

$$\frac{n(n-1)}{1.\,2}(n-2)(n-3)\,.....\,(n-p+i_1+i_2-1)\,C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,\,i_2},$$

ou

$$\frac{1}{1.\,2}A_{n,\,p-i_1-i_2+2}\times C_{p,\,i_1}\times C_{p-i_1,\,i_2}\,.$$

D'autre part, un des numéros peut sortir deux fois, le second se présentant deux, trois, ... $p-2$ fois; ou, le premier numéro sera extrait trois fois, le second l'étant deux, trois, ... $p-3$ fois; et ainsi de suite. En un mot, on doit prendre pour i_1 et i_2 toutes les valeurs entières et positives, à partir de 2, qui satisfont à la condition

$$i_1+i_2 \leqq p.$$

Ainsi, si nous appelons, N_2, le nombre de ces cas, nous aurons

$$N_2=\frac{1}{1.\,2}\sum_{i_1=2}^{i_1=p-2}\ \sum_{i_1=2}^{i_2=p-2} A_{n,\,p-i_1-i_2+2}\times C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,i_2},$$

avec la condition

$$i_1+i_2 \leqq p\,.$$

4° Trois numéros sortiront respectivement i_1, i_2, i_3 fois avec $p-i_1-i_2-i_3$ autres numéros. Le nombre de ces cas est

$$N_3=\frac{1}{1.\,2.\,3}\sum_{i_1=2}^{i_1=p-4}\ \sum_{i_2=2}^{i_2=p-4}\ \sum_{i_3=2}^{i_3=p-4} A_{n,\,p-i_1-i_2-i_3+3}$$

$$\times C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,\,i_2}\times C_{p-i_1-i_2,\,i_3},$$

$$i_1+i_2+i_3 \leqq p\,.$$

. . . .

Finalement, le dernier groupe comprendra les événements suivants : $m-1$ numéros quelconques sortiront respectivement i_1, i_2, i_3, ... i_{m-1} fois avec $p-i_1-i_2-i_3\cdots-i_{m-1}$ autres numéros. En répétant mot à mot notre raisonnement, on trouve que, si nous désignons par N_{m-1} le nombre de ces événements,

$$N_{m-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \sum_{i_1=2}^{i_1=p-2(m-2)} \sum_{i_2=2}^{i_2=p-2(m-2)} \cdots\cdots$$

$$\sum_{i_{m-1}=2}^{i_{m-1}=p-2(m-2)} A_{n,\,p-i_1-i_2\ldots\ldots-i_{m-1}} \times C_{p,i_1} \times C_{p-i_1,\,i_2} \ldots\ldots$$

$$C_{p-i_1-i_2\ldots\ldots-i_{m-2},\,i_{m-1}},$$

avec la condition

$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots\ldots + i_{m-1} \overline{\gtrless} p.$$

Cela posé, les cas défavorables sont au nombre de

$$N_0 + N_1 + N_2 + \ldots\ldots + N_{m-1},$$

et le nombre des cas possibles est n^p; donc, si P_m représente la probabilité cherchée, on aura

$$(1) \qquad P_m = 1 - \frac{N_0 + N_1 + N_2 + \ldots N_{m-1}}{n^p}.$$

Exemple. Soient $n = 4$, $p = 6$ et $m = 3$.
on a

$$P_3 = \frac{4^6 - \sum_{i=2}^{i=6} A_{4,7-i} \times C_{6,i} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=2}^{i_1=4} \sum_{i_2=2}^{i_2=4} A_{4,8-i_1-i_2} \times C_{6,i_1} \times C_{6-i_1,i_3}}{4^6},$$

ou

$$P_3 = \frac{4096-480-360-76-4-1080-720-90-720-120-90}{4096};$$

finalement, on obtient

$$P_3 = \frac{360}{4096}.$$

En effet, un cas favorable est représenté par l'événement suivant

$$11\ 22\ 33,$$

Avec les numéros 1, 2, 3, on peut composer 90 permutations avec répétitions de six chiffres chacune. Par suite, le nombre des cas favorables sera

$$90 \times 4 = 360.$$

Remarque. Aussi longtemps que p sera inférieur à $2m$, la probabilité P_m sera nulle, puisqu'il est impossible d'extraire, dans ce cas, m numéros, chacun au moins deux fois. Par exemple, si $m = 3$ et $p = 4$, on doit avoir identiquement, en vertu de la formule (1),

$$1 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4^4} - 6\,\frac{n(n-1)(n-2)}{4^4}$$
$$- 4\,\frac{n(n-1)}{n^4} - \frac{n}{n^4} - 3\,\frac{n(n-1)}{n^4} = 0,$$

ou

$$n^3 - 1 - (n-1)(n-2)(n-3) - 6(n-1)(n-2) - 7(n-1) = 0.$$

C'est une identité.

Si $p = 2m$, l'événement attendu n'est possible qu'autant que chaque numéro sorte deux fois ; dans ce cas, la probabilité de l'événement sera aussi exprimée par la relation

$$P_m = \frac{A_{n,m} \times C_{2m,2} \times C_{2m-2,2} \times \ldots\ldots \times C_{2,2}}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\, m\, n^{2m}},$$

ou

$$P_m = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)\,2m\,(2m-1)(2m-2)\ldots\ldots 3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\, m\, 2^m\, n^{2m}}.$$

On doit donc avoir identiquement

$$\frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,2m}{2^m}\,C_{n,m} = n^{2m} - N_0 - N_1 - \ldots\ldots - N_{m-1}.$$

Ainsi, pour $n = 4$ et $m = 3$, on a

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{8} \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} = 360.$$

Nous retombons sur le résultat précédent.

3. *Une identité.* De la formule (1), on conclut :

$$n^p = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots.. + N_{\frac{p}{2}}$$

$$n^p = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots.. + N_{\frac{p-1}{2}},$$

selon que p est pair ou impair.

Soient, par exemple, $n = 4$ et $p = 6$. Nous devons vérifier l'identité

$$4^6 = N_0 + N_1 + N_2 + N_3.$$

On a successivement

$$N_0 = 0,$$

$$N_1 = \sum_{i=2}^{i=6} A_{4,7-i} \times C_{6,i} = 20.4.3.2.1 + 4.3.2.15 + 4.3.6 + 4 = 916,$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\sum_{i_2=2}^{i_2=4} A_{4,6-i_2} \times C_{6,2} \times C_{4,i_2} + \frac{1}{2}\sum_{i_2=2}^{i_2=4} A_{4,5-i_2} \times C_{6,3} \times C_{3,i_2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i_2=2}^{i_2=4} A_{4,4-i_2} \times C_{6,4} \times C_{2,i_2}$$

$$= \frac{1}{2}[4.3.2.15.6 + 4.3.2.15.4 + 4.3.15 + 4.3.2.20.3 + 4.3.20 + 4.3.15] = 2820,$$

$$N_3 = \frac{1}{1.2.3} A_{4,3} \times C_{6,2} \times C_{4,2} \times C_{2,2} = \frac{1}{1.2.3} 4.3.2.15.6 = 360.$$

Ainsi

$$4^6 = 916 + 2820 + 360 = 4096;$$

ce qui est exact.

CHAPITRE II

2. Problème. — Une urne contient n numéros; après chaque tirage, on remet dans l'urne le numéro extrait. Combien faut-il faire de tirages pour qu'il devienne probable qu'au moins m numéros, parmi les numéros sortis, se présentent, chacun, au moins deux fois ?

On dit d'un événement qu'il est probable, quand sa probabilité est supérieure à $\frac{1}{2}$. Nous devons donc déterminer p, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{N_0 + N_1 + N_2 + \ldots\ldots + N_{m-1}}{n^p} < \frac{1}{2}.$$

3. Application I. — Soient $m = 1$ et $n = 9000$.

De la formule fondamentale, on déduit celle-ci :

$$P_1 = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p-1)}{n^p},$$

ou

$$P_1 = 1 - \frac{\Gamma(n+1)}{n^p \Gamma(n-p+1)}.$$

En vertu de la formule de Styrling,

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{12n}},$$

si l'on réduit la série à ses quatre premiers termes.

Dans l'évaluation du logarithme de $\Gamma(n+1)$, on commet, en faisant usage de la formule de Styrling ainsi réduite, une erreur inférieure à

$$\frac{\log e}{3.\,4.\,5.\,6\, n^3}.$$

si n surpasse 8000, l'erreur sera moindre que

$$\frac{1}{221\,085\,000\,000\,000},$$

c'est-à-dire moindre qu'une demi-unité du quinzième ordre décimal.

Dans la plupart des cas, on pourrait se borner à calculer la valeur des logarithmes vulgaires à moins d'une unité du treizième ordre. Comme le montre la formule de Styrling, certains logarithmes sont muliplíés par un nombre inférieur à 10000; la valeur de ces logarithmes sera donc entachée d'une erreur inférieure à une unité du neuvième ordre et l'on pourra faire usage des tables de Callet à sept décimales.

Mais si l'on désire avoir des résultats plus approchés, nous calculerons les logarithmes à moins d'une demi-unité du dix-huitième ordre décimal; nous obtiendrons ainsi les logarithmes de certains nombres à moins d'une demi-unité du quatorzième ordre.

Ainsi, dans les limites de l'approximation admise, on aura

$$P_1 = 1 - \frac{e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{12n}}}{n^p\, e^{-(n-p)}\, (n-p)^{n-p+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{12(n-p)}}},$$

ou

$$P = 1 - A,$$

si, pour abréger, nous faisons

$$A = \frac{e^{-p-\frac{p}{12n(n-p)}}}{\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-p+\frac{1}{2}}}.$$

Puis, en prenant les logarithmes, on obtient

$$(2)\quad \log A = -p\log e - \frac{p\log e}{12n(n-p)} - \left(n-p+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{p}{n}\right).$$

Après une série de calculs préliminaires, dont j'épargne au lecteur la fastidieuse lecture, on est conduit à poser

$$p = 111.$$

Calcul numérique de A.

Comme les tables de Callet à 20 décimales ne contiennent que les logarithmes de nombres inférieurs à 1200 et que 2963 est un nombre premier, nous calculerons directement le logarithme de ce nombre. On sait que

$$\log(n+1) = \log n + 2M\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right),$$

M désignant le module, qui est égal à

$$0{,}4342944819032518276511 29\dots$$

Si l'on réduit la série à ses i premiers termes, l'erreur commise est inférieure à

$$\frac{1}{4n(n+1)(2i+1)(2n+1)^{2i-1}}.$$

Si nous nous bornons aux trois premiers termes, l'erreur commise sera moindre qu'une unité du vingt et unième ordre décimal.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\log 8888 = \log 8 \times 1111 &= 3{,}94880404593281120067\dots \\
\frac{2M}{17777} &= 0{,}00004886026685079055\dots \\
\frac{2M}{3 \times 17777^3} &= 0{,}0000000000000515368\dots.. \\
\hline
\log 8889 &= 3{,}94885290619971353\dots\dots..
\end{aligned}$$

Nous disposerons les calculs de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
-\log 9000 &= \quad 3{,}95424250943932487 \\
+\log 8889 &= \quad 3{,}94885290619971353 \\
\hline
\log \frac{8889}{9000} &= -\ 0{,}00538960323961134
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
111 \log e &= \quad 48{,}206687491261 \\
\frac{111 \log e}{12 \times 9000 \times 8889} &= \quad 0{,}000000050215 \\
\hline
111 \log e \left(1 + \frac{1}{12 \times 9000 \times 8889}\right) &= \quad 48{,}206687541476 \\
\left(8889 + \frac{1}{2}\right) \log \frac{8889}{9000} &= -\ 47{,}910877998525 \\
\hline
\log A &= -\ 0{,}295809542951 \\
\log A &= \quad 3{,}704190457049 - 4
\end{aligned}$$

Repassant des logarithmes aux nombres, on trouve

$$A = 0{,}506046\,;$$

et

$$P = 0{,}493954.$$

La probabilité est inférieure à $\frac{1}{2}$, mais très voisine de cette quantité.

Faisons un nouvel essai, et prenons $p = 112$.

Calcul numérique de A.

$$p = 112 \text{ et } n = 9000.$$

$$\begin{array}{rl} -\log 9000 = & -\ 3{,}9542425094393 2487 \\ +\log 8888 = & \ 3{,}9488040459328 1120 \\ \hline \log \dfrac{8888}{9000} = & -\ 0{,}0054384635065 1365 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -\ 112 \log e = & -\ 48{,}640981973164 \\ -\dfrac{112 \log e}{12 \times 9000 \times 8888} = & -\ 0{,}000000050673 \\ \hline & -\ 48{,}640982023837 \\ -\left(8888 + \dfrac{1}{2}\right) \log \dfrac{8888}{9000} = & +\ 48{,}339782817647 \\ \hline \log A = & -\ 0{,}301199146190 \\ \log A = & \ 3{,}698800853810 - 4 \end{array}$$

En conséquence,

$$A = 0{,}499805405\,;$$

et

$$P_1 = 0{,}500194595.$$

Les huit premières figures du nombre P sont exactes. Ce nombre étant supérieur à $\frac{1}{2}$, il est donc probable que, parmi les 112 numéros extraits successivement de l'urne et remis dans celle-ci, après chaque tirage, un numéro, au moins, sera sorti au moins deux fois.

4. Application II. — Nous supposerons maintenant

$$m = 2 \text{ et } n = 9000.$$

Nous ferons usage de la formule

$$(3)\quad P_2 = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n^p} - \frac{1}{n^p}\sum_{i=2}^{i=p} A_{n,p-i+1} \times C_{p,i},$$

déduite de la formule fondamentale, en y supposant $m = 2$.

Il nous faut encore déterminer p, de telle sorte que la probabilité P_2 soit supérieure à $\frac{1}{2}$. A cette fin, développons la sommation :

$$\frac{1}{n^p}\sum_{i=2}^{i=p} A_{n,p-i+1} \times C_{p,i} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{n^p}\left[C_{p,2} + C_{p,3}\frac{1}{n-p+2} + C_{p,4}\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)} + \ldots \right.$$
$$\left. + C_{p,i}\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\ldots(n-p+i-1)} + \ldots\ldots\right].$$

Si nous ne prenons que les trois premiers termes et que nous désignions par ϵ_1 l'erreur commise, on a d'abord

$$\epsilon_1 < \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{n^p}\left[C_{p,5}\frac{1}{(n-p+2)^3} + C_{p,6}\frac{1}{(n-p+2)^4}\right.$$
$$\left. + \ldots + C_{p,i}\frac{1}{(n-p+2)^{i-2}} + \ldots\right];$$

ou

$$\epsilon_1 < (n-p+2)^2\frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{n^p}\left[\left(1+\frac{1}{n-p+2}\right)^p - 1\right.$$
$$\left. - C_{p,1}\frac{1}{n-p+2} - \ldots - C_{p,4}\frac{1}{(n-p+2)^4}\right].$$

Au moyen de la formule de Styrling, nous mettrons la relation (3) sous la forme :

$$P_2 = 1 - \frac{e^{-p-\frac{p}{12n(n-p)}}}{\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-p+\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{e^{-(p-1)-\frac{p-1}{12n(n-p+1)}}}{n\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-p+\frac{3}{2}}}\left[C_{p,2} + C_{p,3}\frac{1}{(n-p+2)} + C_{p,4}\frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)}\right],$$

ou

$$(4)\quad P_2 = 1 - A - B\left[C_{p,2} + C_{p,3}\frac{1}{(n-p+2)} + C_{p,3}\frac{1}{(n-p+2)\,(n-p+3)}\right],$$

si nous faisons

$$B = \frac{e^{-(p-1)-\frac{p-1}{12n(n-p+1)}}}{n\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{n-p+\frac{3}{2}}}.$$

De la même manière, on trouve

$$(5)\quad \epsilon_1 < (n-p+2)^2\,B\left[\left(1+\frac{1}{n-p+2}\right)^p - 1 - C_{p,1}\frac{1}{(n-p+2)} - \dots - C_{p,4}\frac{1}{(n-p+2)^4}\right].$$

Après une série d'essais préliminaires, on est amené à poser

$$p = 174.$$

Calcul numérique de A.

$$p = 174 \quad \text{et} \quad n = 9000.$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 25 & = & 1{,}39794000867203760957 \\
\log 353 & = & 2{,}54777470538782256550 \\
\hline
\log 8835 & = & 3{,}94571471405986017507 \\
\dfrac{2M}{17651} & = & 0{,}00004920905126092\,0203 \\
\dfrac{2M}{3\times 17651^3} & = & 0{,}00000000000005264828 \\
\hline
\log 8826 & = & 3{,}94576392311117374355 \\
\log 9000 & = & 3{,}95424250943932487459 \\
\hline
\log \dfrac{8826}{9090} & = & -\ 0{,}00847858632815113104
\end{array}$$

$$- 174 \log e = - 75{,}567239851166$$

$$- \frac{174 \log e}{12 \times 9000 \times 8826} = - 0{,}000000079276$$

$$- 174 \log e \left(1 + \frac{1}{12 \times 9000 \times 8826}\right) = - 75{,}567239930442$$

$$- \left(8826 + \frac{1}{2}\right) \log \frac{8826}{9000} = + 74{,}836242225426$$

$$\log A = - 0{,}730997705016$$

$$\log A = 3{,}269002294984 - 4\,.$$

Par suite,

$$A = 0{,}1857899...$$

Calcul numérique de B. On a

$$B = \frac{e^{-173 - \frac{173}{12 \times 9000 \times 8827}}}{9000 \left(1 - \frac{173}{9000}\right)^{8827 + \frac{1}{2}}} \left[\frac{174 \times 173}{2} + \frac{174 \times 173 \times 172}{6 \times 8828} + \frac{174 \times 173 \times 172 \times 171}{24 \times 8828 \times 8829}\right],$$

ou, plus simplement,

$$B = \frac{e^{-173 - \frac{173}{12 \times 9000 \times 8827}}}{9000 \left(\frac{8827}{9000}\right)^{8827 + \frac{1}{2}}} \frac{87 \times 173 \times 78451059}{8828 \times 8829}\,.$$

$$\log 91 = 1{,}959041392321093599 92$$

$$\log 97 = 1{,}98677173426624485178$$

$$\log 8827 = 3{,}94581312658733845170$$

$$\log \frac{8827}{9000} = - 0{,}00842938285198642289$$

D'une part,

$$
\begin{array}{rl}
-\ 173 \log e = & -\ 75{,}132945369263 \\
-\ \dfrac{173 \log e}{12 \times 9000 \times 8827} = & -\ \ \ 0{,}000000078801 \\
\hline
-\ 173 \log e \left(1 + \dfrac{1}{12 \times 9000 \times 8827}\right) = & -\ 75{,}132945448064 \\
-\ \log 9000 = & -\ \ \ 3{,}954242509439 \\
-\ \log 8828 = & -\ \ \ 3{,}945862324490 \\
-\ \log 8829 = & -\ \ \ 3{,}945911516819 \\
\hline
 & -\ 86{,}978961798812
\end{array}
$$

D'autre part,

$$
\begin{array}{rl}
-\left(8827 + \dfrac{1}{2}\right) \log \dfrac{8827}{9000} = & 74{,}410377125910 \\
\log 78451059 = & \ \ 7{,}894598810410 \\
\log 87 = & \ \ 1{,}939519252619 \\
\log 173 = & \ \ 2{,}238046103129 \\
\hline
 & 86{,}482541292068
\end{array}
$$

Ainsi,

$$\log \mathrm{B} = -\ 0{,}496420506744$$

ou

$$\log \mathrm{B} = 3{,}503579493256 - 4\,;$$

d'où

$$\mathrm{B} = 0{,}3188449.$$

Finalement,

$$\mathrm{P}_2 = 1 - 0{,}1857899 - 0{,}3188449\,,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}_2 = 0{,}4953652\,.$$

La probabilité est certainement inférieure à $\frac{1}{2}$, d'autant que nous avons négligé une partie soustractive. Nous ferons un nouvel essai en prenant p égal à 175.

Calcul numérique de A.

$$p = 175 \quad \text{et} \quad n = 9000.$$

$$\begin{array}{rl} \log 9000 = & 3{,}95424250943932487459 \\ \log 8825 = & 3{,}94571471405986017507 \\ \hline \log \dfrac{8825}{9000} = & -\ 0{,}00852779537946469952 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -\ 175 \log e = & -\ 76{,}001534333069 \\ -\ \dfrac{175 \log e}{12 \times 9800 \times 8825} = & -\ 0{,}000000079741 \\ \hline -\ 175 \log e \left(1 + \dfrac{1}{12 \times 9000 \times 8825}\right) = & -\ 76{,}001534412810 \\ -\left(8825 + \dfrac{1}{2}\right) \log \dfrac{8825}{9000} = & \ 75{,}262058108067 \end{array}$$

$$\log A = 3{,}260523695257 - 4.$$

Donc

$$A = 0{,}182189646.$$

Calcul numérique de B.

$$B = \frac{e^{-174 - \frac{174}{12 \times 9000 \times 8826}}}{9000 \left(\frac{8826}{9000}\right)^{8826 + \frac{1}{2}}} \left[\frac{175 \times 174}{1.2} + \frac{275 \times 174 \times 173}{1.2.3 \times 8827} + \frac{175 \times 174 \times 173 \times 172}{1.2.3.4 \times 8827 \times 8828}\right],$$

ou, plus simplement,

$$B = \frac{e^{-174 - \frac{174}{12 \times 9000 \times 8826}}}{9000 \left(\frac{8826}{9000}\right)^{8826 + \frac{1}{2}}} \; \frac{175 \times 87 \times 7843617}{8827 \times 8828}.$$

D'une part,

$$
\begin{aligned}
-174 \log e &= -\ 75{,}567239851166 \\
\frac{-174 \log e}{12 \times 9000 \times 8826} &= -\ \ \ 0{,}000000079276 \\
-\log 9000 &= -\ \ \ 3{,}954242509439 \\
-\log 8827 &= -\ \ \ 3{,}945813126587 \\
-\log 8828 &= -\ \ \ 3{,}945862324490
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
-\left(8826 + \frac{1}{2}\right) \log \frac{8826}{9000} &= 74{,}836242225426 \\
\log 78436317 &= \ \ 7{,}894517193047 \\
\log 175 &= \ \ 2{,}243038048686 \\
\log 87 &= \ \ 1{,}939519252619 \\
\hline
& \ \ \ \ 86{,}913316719778
\end{aligned}
$$

En conséquence,

$$\log \mathrm{B} = 3{,}500158828820 - 4\,;$$

et

$$\mathrm{B} = 0{,}316343437\,.$$

Puis,

$$\mathrm{P}_2 = 1 - 0{,}182189646 - 0{,}316343437 = 0{,}501466917\,.$$

Il paraît donc probable qu'en 175 tirages deux numéros, au moins, sortiront au moins deux fois. Pour nous assurer qu'il en est ainsi, il nous faut montrer que la probabilité de l'événement surpasse réellement $\frac{1}{2}$. Nous devons calculer une limite de l'erreur commise. En effet, la partie de la quantité B, que nous avons négligée, pourrait être telle, que la probabilité de l'événement fût encore inférieure à $\frac{1}{2}$, même après 175 tirages.

Calcul d'une limite de l'erreur ϵ_1.

Nous déterminerons d'abord la valeur de la puissance $\left(\frac{8828}{8827}\right)^{175}$ avec une grande approximation. A cette fin, cherchons le logarithme de 8828. Comme 2207 est un nombre premier, nous devons évaluer directement ce logarithme.

Si l'on réduit la série connue à ses quatre premiers termes, on a

$$\log 8828 = \log 8827 + 2M \left(\frac{1}{17655} + \frac{1}{3\,(17655)^3} + \frac{1}{5\,(17655)^5} \right),$$

l'erreur étant moindre que

$$\frac{1}{7 \times 4 \times 8827 \times 8828 \times (17655)^5},$$

c'est-à-dire inférieure à une unité du 30^e ordre.

On trouve successivement

$$\begin{aligned}
\log 8827 &= 3{,}9458131265873384517030832820 \\
\frac{2M}{17655} &= 0{,}0000491979022263666754631695 \\
\frac{2M}{3\,(17655)^3} &= 0{,}0000000000000526126148200887 \\
\frac{2M}{5\,(17655)^5} &= 0{,}0000000000000000000001001097 \\
\hline
\log 8828 &= 3{,}9458623244896174309934666499 \\
\log 8827 &= 3.9458131265873384517030832820 \\
\hline
\log \frac{8828}{8827} &= 0{,}0000491979022789792903833679 \\
175 \log \frac{8828}{8827} &= 0{,}00860963289882137582
\end{aligned}$$

L'erreur est moindre qu'une demie unité du 21^e ordre décimal.

Calculons maintenant, avec seize figures à très peu près, le nombre correspondant à ce logarithme.

Considérons le logarithme :

$$B = 2{,}00860963289882137582.$$

Le logarithme immédiatement inférieur est le logarithme de 102, qui a pour expression,

$$A = 2{,}00860017176191756105.$$

Nous disposons le calcul, comme il suit :

$$
\begin{aligned}
B - A &= 0{,}0000094611369038147 7\\
R &= 0{,}946113690381477\\
X &= 0{,}0539963096\\
d' &= 0{,}0000023026116026880 7\\
d'' &= 0{,}0000000000530202019 2\\
\frac{1}{2} X d'' &= 0{,}0000000000014285315 1\\
d' - \frac{1}{2} X d'' &= 0{,}0000023026101741565 6\\
R\left(d' - \frac{1}{2} X d''\right) &= 0{,}0000021785310093811 9\\
R\left(d' - \frac{1}{2} X d''\right) + 1 &= 1{,}0000021785310093811 9\\
102\left[1 + R\left(d' - \frac{1}{2} X d''\right)\right] &= 102{,}002222101629568\ldots
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$\left(\frac{8828}{8827}\right)^{175} = 1{,}02002222101629568,$$

avec à peu près seize figures exactes.

De ce nombre, nous devons soustraire les quantités :

$$
\begin{aligned}
1 &= 1{,}0000000000000\\
\frac{175}{8827} &= 0{,}0198255352894\\
\frac{175 \times 174}{2\,(8827)^2} &= 0{,}0001954029194\\
\frac{175 \times 174 \times 173}{6\,(8827)^3} &= 0{,}0000012765645\\
\frac{175 \times 174 \times 173 \times 172}{24\,(8828)^4} &= 0{,}0000000062159\\
\hline
&\ 1{,}0200222209892
\end{aligned}
$$

On a donc l'inégalité

$$\epsilon_1 < (8827)^2 \frac{e^{-174 - \frac{174}{12 \times 9000 \times 8826}}}{9000\left(\frac{8826}{9000}\right)^{8826+\frac{1}{2}}} \qquad 0{,}000\,000\,000\,03\,.$$

On trouve facilement que cette quantité ϵ_1 est inférieure à 0,0000000053614. L'erreur commise étant moindre qu'une unité du 8e ordre décimal, nous en concluons que les sept premières figures du nombre P_2, sinon les huit premières, sont exactes. Il est donc probable que, après 175 tirages, deux numéros, au moins, se présenteront au moins deux fois, parmi les 175 numéros, extraits de l'urne.

5. Application III. — Ici $m = 3$ et n est toujours égal à 9000. Dans cette application, comme dans les deux précédentes, nous aurons recours à des formules d'approximation. De l'expression de N_2, nous ne retiendrons que les six premiers termes; et, si nous désignons par C la somme de ces termes, on trouve aisément que

$$C = \frac{e^{-(p-2)-\frac{(p-2)}{12n(n-p+2)}}}{4n^2\left(1-\frac{p-2}{n}\right)^{n-p+\frac{5}{2}}}\, p(p-1)(p-2)(p-3)\left[\frac{1}{2}+\frac{p-4}{3(n-p+3)} + \frac{5(p-4)(p-5)}{36(n-p+3)(n-p+4)}\right],$$

l'erreur commise ϵ_2 étant inférieure à

$$\frac{1}{2}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+3)(n-p+3)^4}{n^p}\sum\frac{C_{p,i_1}\times C_{p-i_1,i_2}}{(n-p+3)^{i_1+i_2}}.$$

Il faut étendre cette sommation à toutes les valeurs de i_1 et de i_2, à partir de 2, qui satisfont aux inégalités

$$i_1 + i_2 \geqq 7, \quad i_1 + i_2 \leqq p.$$

J'observe ensuite que cette sommation comprend une partie des termes du développement du trinôme

$$\left(1 + \frac{1}{n-p+3} + \frac{1}{1-p+3}\right)^p.$$

Si nous complétons cette suite en ajoutant et retranchant les termes, qui font partie du développement du trinôme, sans exister dans cette sommation, nous aurons l'inégalité

$$\epsilon_2 < \frac{(n-p+3)^4}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-p+3)}{n^p}\left[\left(1+\frac{2}{n-p+3}\right)^p - 1 - \frac{2p}{n-p+3} - \frac{2p(p-1)}{(n-p-3)^2} - \frac{4p(p-1)(p-2)}{3(n-p+3)^3} - \frac{2p(p-1)(p-2)(p-3)}{3(n-p+3)^4} - \frac{4p(p-1)(p-2)\ldots(p-4)}{3.5(n-p+3)^5} - \frac{4p(p-1)\ldots(p-5)}{2.3.5(n-p+3)^6}\ \ldots\ldots\right],$$

en négligeant dans la parenthèse une suite de termes soustractifs et très petits.

En vertu de la formule de Styrling, cette inégalité devient

$$(6) \quad \epsilon_2 < \frac{(n-p+3)^4}{2} \frac{e^{-(p-2)-\frac{p-2}{12n(n-p+2)}}}{n^2\left(1-\frac{p-2}{n}\right)^{n-p+\frac{5}{2}}} \left[\left(1+\frac{2}{n-p+3}\right)^p - 1 \right.$$
$$- \frac{2p}{n-p+3} - \frac{2p(p-1)}{(n-p+3)^2} - \frac{4p(p-1)(p-2)}{3(n-p+3)^3} - \frac{2p(p-1)\ldots(p-3)}{3(n-p+3)^4}$$
$$\left. - \frac{4p(p-1)\ldots(p-4)}{3.5(n-p+3)^5} - \frac{4p(p-1)\ldots(p-5)}{2.3.5(n-p+3)^6} \cdots\cdots \right].$$

On a d'ailleurs

$$(7) \qquad P_3 = 1 - A - B - C.$$

Après plusieurs essais et de laborieux calculs qu'il est inutile de reproduire ici, on en vient à poser

$$p = 221.$$

Nous n'entrerons point de nouveau dans tous les détails du calcul, dont nous avons indiqué suffisamment la marche dans les deux premières applications, et nous nous bornerons simplement à énoncer les résultats, laissant au lecteur le soin d'en vérifier l'exactitude. On trouve successivement

$$A = 0{,}0656557,$$
$$B = 0{,}1832869,$$
$$C = 0{,}2511725.$$

Donc

$$P_3 = 1 - 0{,}0656557 - 0{,}1832869 - 0{,}2511725,$$

ou

$$P_3 = 0{,}4998849.$$

La probabilité est encore inférieure à $\frac{1}{2}$, mais très voisine de ce nombre. On peut espérer que l'essai suivant résoudra la question.

Soit donc $p = 222$; on a

$$A = 0{,}0640362,$$
$$B = 0{,}1804596,$$
$$C = 0{,}2495456;$$

d'où

$$P_3 = 1 - 0{,}0640362 - 0{,}1804596 - 0{,}2495456,$$

et

$$P_3 = 0{,}5059586.$$

Nous devons faire ici la remarque que nous avons déjà présentée plus haut : il s'agit d'apprécier, sur la valeur de la probabilité P_3, l'influence des erreurs ϵ_1 et ϵ_2, commises respectivement dans l'évaluation des quantités B et C. Nous pouvons nous dispenser de calculer l'erreur ϵ_1, qui est certainement inférieure à une unité de 7e ordre décimal; il ne nous reste donc qu'à déterminer une limite de l'erreur ϵ_2. A cet effet, on se servira de la formule (6), d'où l'on déduit

$$\epsilon_2 < (8781)^4 \frac{e^{-220-\frac{220}{12 \times 9000 \times 8780}}}{(9000)^2 \left(\frac{8780}{9000}\right)^{8780+\frac{1}{2}}} \; 0{,}000\,000\,000\,000\,2,$$

et, *a fortiori*,

$$\epsilon_2 < 0{,}000\,001.$$

On peut donc affirmer que les cinq premiers chiffres, sinon les six premiers, de la probabilité P_3 sont connus.

Ainsi, si l'on extrait 112, 175, 222 numéros d'une urne, qui en contient 9000, et que, après chaque tirage, on remette dans l'urne le numéro sorti, on peut parier un contre un, avec avantage, qu'on amènera, au moins deux fois, respectivement, au moins un numéro, au moins deux numéros, au moins trois numéros. On voit aussi que les probabilités de ces événements augmentent rapidement : en 222 tirages, les probabilités P_1 et P_2 sont très approximativement 0,9359638 et 0,7555062.

Comme solution des deux premières applications, j'avais donné les nombres 113 et 176 à M. E. Harzé, directeur général des mines. Une légère erreur s'était glissée dans mes premiers calculs, faits un peu précipitamment. Les résultats actuels ne font que confirmer les conclusions, émises par notre savant directeur général dans la note intitulée : *Du grisou dans ses rapports avec la météorologie endogène.* — 2e mémoire.

Liége, le 1er août 1889.

J. BEAUPAIN.

POST-SCRIPTUM

Depuis mon dernier mémoire mentionné dans l'*Introduction* de ce travail, d'assez nombreux tremblements de terre se sont manifestés sans qu'il ait été possible d'y rattacher des dégagements anormaux de grisou.

A ce propos, je crois intéressant de reproduire les résultats de l'enquête à laquelle je fis procéder en juillet dernier, les journaux ayant rapporté que le 19 de ce mois, un tremblement de terre s'était produit à Rome à 2 h. 20 m.

Je demandai immédiatement au savant professeur de l'École militaire, M. Eugène Lagrange, qui a installé à Uccle une station géophysique qu'il dirige, si le phénomène avait eu sa répercussion en Belgique. En même temps, j'écrivis aux directeurs de neuf charbonnages à grisou échelonnés sur toute notre vallée houillère, de l'ouest à l'est, depuis Élouges près de la frontière française, jusqu'à Tilleur lez-Liége, pour connaître si des dégagements anormaux de grisou avaient été constatés dans leurs travaux. Ces neuf charbonnages ne comportent pas moins de 43 sièges importants d'exploitation.

Voici les réponses obtenues :

M. LAGRANGE. — Le tremblement de terre s'est enregistré au sismographe d'Uccle sur les trois pendules : l'heure de l'arrivée de l'onde a été 1 h. 40 m., temps de Greenwich. En se reportant à l'heure ci-dessus de 2 h. 20 m. (temps Europe centrale), cela signifie que l'onde a mis 20 minutes pour arriver à Uccle. L'agitation des pendules a duré 20 minutes environ. En outre, le 17 du même mois, à 5 h. 30 m. du soir, il s'était produit un autre tremblement de terre.

M. Dupire, directeur gérant de l'Ouest de Mons. — Il ne s'est rien passé d'anormal dans les travaux de notre charbonnage.

M. Isaac, directeur gérant de la Compagnie de Charbonnages belges. — Aucun dégagement anormal de grisou n'a été signalé dans les rapports de ces jours derniers. Une enquête spéciale a confirmé le contenu des rapports.

M. Mativa, directeur gérant des Produits. —Aucun dégagement anormal.

M. Ménétrier, directeur gérant d'Anderlues. — Il n'y a pas eu de dégagement anormal de grisou, pas plus hier et avant-hier (20 et 19) que les jours précédents.

M. Grosfils, directeur gérant de Fontaine-l'Évêque. — Rien d'anormal n'a été signalé dans les travaux au point de vue du dégagement de grisou.

M. Evrard, directeur gérant de Marcinelle-Nord. — Il n'y a pas eu, cette semaine, de dégagements anormaux de grisou dans les travaux.

M. Dubois, directeur gérant de Marihaye. — Nous n'avons rien remarqué d'anormal mercredi dernier (19 juillet).

M. Souheur, directeur gérant des Six Bonniers. — Nous n'avons pas constaté de dégagements anormaux de gaz coïncidant avec le tremblement de terre de Rome.

M. Banneux, directeur gérant du Horloz. — Les rapports ordinaires et journaliers de nos ingénieurs ne nous ont rien fait remarquer. Au reçu de votre demande, nous avons fait procéder à une enquête minutieuse, qui ne révéla la manifestation d'aucun phénomène, dégagement de grisou, éboulement, mouvement de terrain, etc., que l'on pourrait rapporter, même de très loin, à un sisme quelconque.

Tout ceci, en attendant une suite d'enquêtes analogues, pour documenter la question du grisou dans ses rapports avec la météorologie endogène.

Septembre 1899. E. H.