LES RENTES VIAGÈRES DIFFÉRÉES

ET

L'ASSURANCE CONTRE L'INVALIDITÉ

PAR

J. HENROTTE

Inspecteur principal du travail.

[36841]

Suite et fin (voir la précédente livraison)

Note A. — Rentes viagères différées.

Rente annuelle K_y *acquise à l'âge* y *par des versements mensuels ininterrompus de 1 franc effectués à partir de l'âge* x.

La valeur de l'engagement de la Caisse vis-à-vis d'un affilié d'âge y consiste à lui garantir une rente annuelle viagère de K_y francs, payable par douzièmes et fin du mois.

Supposons d'abord que la rente annuelle soit payable en une fois et à la fin de chaque année; la valeur actuelle de 1 franc de rente est alors déterminée par la formule :

$$a_y = \frac{l_{y+1}}{l_y} v + \frac{l_{y+2}}{l_y} v^2 + \frac{l_{y+3}}{l_y} v^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

où

l_y, l_{y+1}, l_{y+2}, sont les nombres de survivants d'âge, $y, y+1$, $y+2$, etc., et $v = \frac{1}{1+r}$, r étant le taux de l'intérêt.

Si l'on pose $l_y v^y = D_y$ (2), la formule (1) devient :

$$a_y = \frac{D_{y+1} + D_{y+2} + D_{y+3} + \ldots\ldots}{D_y} = \frac{\sum D_{y+1}}{D_y}$$

et si l'on pose $N_y = \Sigma D_{y+1}$ (3),

$$a_y = \frac{N_y}{D_y} \quad (4),$$

Si, au lieu de payer la rente annuelle en une fois, on paie cette rente en m fois, et à terme échu, on démontre, en développant la fonction D_y d'après la formule d'Euler, que la valeur actuelle de 1 franc de rente est alors donnée par la formule approximative :

$$a_y^{(m)} = \frac{N_y}{D_y} + \frac{m-1}{2m}$$

Si les rentes sont servies par douzièmes cette formule devient : $(m = 12)$

$$a_y^{(12)} = \frac{N_y}{D_y} + 0{,}4583 \quad (5)$$

Cette valeur actuelle $a_y^{(12)}$ est rapportée au commencement de l'année y; la même valeur rapportée au commencement de l'année x, ou ce qui revient au même, la valeur actuelle d'une rente viagère de 1 franc reposant sur une tête y et différée de $y - x$ années, est :

$$_{y-x}|a_y^{(12)} = a_y^{(12)} \frac{l_y}{l_x} v^{y-x} = a_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \quad (6)$$

En résumé, la valeur de l'engagement de la Caisse, rapportée au commencement de l'année x sera :

$$K_y a_y^{(12)} \frac{D_y}{D_y} \quad (7)$$

D'autre part, l'engagement de l'affilié consiste à servir pendant $y - x$ années, s'il est en vie, une cotisation de 1 franc, à la fin de chaque mois.

Admettons d'abord que la cotisation soit de 1 franc, payée en une fois, et à la fin de chaque année.

La valeur actuelle de cette cotisation est celle d'une annuité viagère reposant sur une tête x et payée pendant $y - x$ années, soit :

$$]_{y-x}\, a_x = \frac{N_x - N_y}{D_x} = a_x - \frac{D_y}{D_x} a_y \quad (8)$$

Si maintenant, la cotisation de 1 franc est payée en m fois, et à terme échu, la valeur actuelle de cette cotisation sera :

$$]_{y-x}\, a_x^{(m)} = a_x^{(m)} - \frac{D_y}{D_x} a_y^{(m)} \quad (9)$$

Par conséquent, la valeur de la cotisation de 1 franc par mois sera :

$$12\left[a_x^{(12)} - \frac{D_y}{D_x}a_y^{(12)}\right]$$

Toutefois, on doit prélever sur ces cotisations les frais d'administration, estimés à 3 °/₀ des sommes versées; 97 °/₀ seulement de ces cotisations servent donc à l'acquisition de rentes et, par suite, l'engagement de chaque affilié sera :

$$11{,}64\left[a_x^{(12)} - \frac{D_y}{D_x}a_y^{(12)}\right] \quad (10)$$

Si l'on égale les valeurs (10) et (7) on trouve la formule :

$$K_y = 11{,}64\left[\frac{a_x^{(12)}\,D_x}{a_y^{(12)}\,D_y} - 1\right] \quad (A)$$

Telle est la formule à l'aide de laquelle nous avons prolongé en dessous de 50 ans, le tarif des rentes différées actuellement en vigueur à la la Caisse de retraite sous la garantie du Gouvernement. [Table de Quételet, taux d'intérêt 3 °/₀.]

En réalité, cette formule n'est pas celle qui a servi à établir ce tarif; elle donne des valeur de K_y légèrement inférieures, comme le montre le tableau suivant.

Rentes acquises à 65 ans par des versements mensuels ininterrompus de 1 franc effectués dès l'âge de 20 ans.

Age d'entrée en jouissance.	Tarif en vigueur à la caisse de retraite de l'Etat.	Formule (A)
25	. . .	3,1314
30	. . .	7,3239
35	. . .	13,0627
40	. . .	21,1422
45	. . .	32,9197
50	51,07	50.9323
55	80,43	80,2219
60	131,80	131,4660
65	230,89	230,6582

Tableau des valeurs dont il est question dans la note **A**, *pour des âges variant de 5 en 5 années.*

x	l_x	v^x	D_x	N_x	a_x	$a_x^{(12)}$
20	635	0,553676	351,584260	7331,442116	20,8526	21,3109
25	604	0,477606	288,474024	5767,508420	19,9930	20,4515
30	573	0,411987	236,068551	4487,165876	19,0080	19,4662
35	543	0,355383	192,972969	3439,335086	17,8230	18,2812
40	511	0,306557	156,650627	2586,543075	16,5120	16,9698
45	476	0,264439	125,872964	1898,031230	15,0790	15,5372
50	440	0,228107	100,367080	1346,729694	13,4180	13,8763
55	397	0,196767	78,116499	912,860397	11,6859	12,1442
60	345	0,169733	58,557885	582,125246	9,9410	10,3993
65	284	0,146413	41,874118	340,753140	8,1376	8,5959
70	216	0,126297	27,280152	176,869200	—	—
75	139	0,108945	15,143355	78,007128	—	—
80	75	0,093977	7,048275	28,143896	—	—
85	31	0,081065	2,513015	7,699293	—	—
90	9	0,069928	0,629352	1,596999	—	—
95	2	0,060320	0,120640	0,229186	—	—
100	0	0,052033	0	0	—	—

Note B. — Assurance contre l'invalidité. — *Valeur* K_x *de la rente d'invalidité, à laquelle donnent droit à n'importe quel âge, des versements mensuels ininterrompus de 1 franc, effectués dès l'âge* x, *pourvu que l'invalidité survienne avant 65 ans.*

Dans une caisse d'assurance contre l'invalidité, ce sont les valides seulement qui versent des cotisations ; par conséquent, la première question à résoudre est de rechercher quel est sur λ_x valides, le nombre de survivants λ_y en état de validité à un âge quelconque y.

Désignons par l_x le nombre de survivants d'âge x. Ces l_x survivants comprennent λ_x valides et ${}^{(i)}l_x$ invalides, de telle façon qu'on peut écrire :

$$l_x = \lambda_x + {}^{(i)}l_x$$

$$\text{et} \quad l_{x+1} = \lambda_{x+1} + {}^{(i)}l_{x+1}$$

Et si l'on désigne par q_x la probabilité, pour un membre d'une population générale, de mourir dans le cours de l'année $x+1$, on a :

$$\lambda_{x+1} + {}^{(i)}l_{x+1} = (\lambda_x + {}^{(i)}l_x)\ (1 - q_x) \quad (1).$$

D'autre part, si l'on suppose que la mortalité des invalides est exactement la même que celle de la population générale, il est clair que le nombre des invalides d'âge $x+1$, est égal au nombre des survivants des invalides d'âge x, augmenté du nombre des personnes devenues invalides pendant le cours de l'année $x+1$, et qui sont encore vivantes à la fin de l'année $x+1$.

En désignant par J'_x le nombre des cas d'invalidité survenus pendant l'année $x+1$, parmi λ_x valides, le nombre des invalides en vie à la fin de l'année $(x+1)$ sera

$$J_x = J'_x \left(1 - \frac{q_x}{2}\right)$$

La mortalité annuelle sur J_x' invalides, étant égale $\frac{J_x q_x}{2}$, attendu que les cas d'invalidité se répartissent sur toute la durée de l'année, On aura donc l'équation suivante :

$$^{(i)}l_{x+1} = {}^{(i)}l_x(1 - q_x) + J_x'\left(1 - \frac{q_x}{2}\right) \quad (2)$$

D'autre part, si l'on désigne par i_x la probabilité pour un valide de devenir invalide dans le cours de l'année $x + 1$,

$$J_x' = \lambda_x i_x \quad (3)$$

et l'équation (2) peut s'écrire

$$^{(i)}l_{x+1} = {}^{(i)}l_x[1 - q_x] + \lambda_x i_x\left(1 - \frac{q_x}{2}\right) \quad (4).$$

En combinant les équations (1) et (4), il vient :

$$\lambda_{x+1} = \lambda_x \left[(1 - q_x) - i_x\left(1 - \frac{q_x}{2}\right)\right] \quad (5)$$

Telle est la formule qui a servi à établir, de proche en proche, la décroissance du nombre d'affiliés en état de validité.

Évaluons maintenant la valeur actuelle de l'engagement d'un affilié valide, d'âge x, et qui doit payer une cotisation de 1 franc par mois, à partir de cet âge x, jusque l'âge y où l'invalidité survient, et au plus tard jusque 65 ans révolus.

Supposons d'abord que la cotisation soit de 1 franc par an, payée en une fois, à la fin de chaque année, et soit α_x la valeur actuelle d'une telle cotisation payée au plus tard jusque 65 ans, on aura

$$\alpha_x = \frac{v^{x+1}\lambda_{x+1} + v^{x+2}\lambda_{x+2} + \dots\dots}{\lambda_x v^x}$$

ou bien si l'on pose :

$$D_x' = v^x \lambda_x$$

et
$$N'_x = \sum_{x=x+1}^{x=65} vx \lambda_x$$

on aura :

$$\alpha_x = \frac{N'_x}{D'_x} \quad (6).$$

Si la cotisation de 1 franc, au lieu d'être payée en une fois, est versée m fois par an, et à terme échu, la valeur actuelle de ces cotisations sera :

$$\alpha_x^{(m)} = \alpha_x + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D'_{65}}{D'_x}\right)$$

En particulier, si $m = 12$,

$$\alpha_x^{(12)} = \alpha_x + 0{,}4583\left(1 - \frac{D'_{65}}{D'_x}\right) \quad (7)$$

Comme l'affilié verse 1 franc tous les mois, c'est-à-dire 12 francs par an, et que 3 °/₀ de ces versements sont prélevés pour frais d'administration, il y a seulement $12 \times 0{,}97$, soit 11,64 francs qui servent à l'acquisition de rentes.

En conséquence, la valeur actuelle de l'engagement d'un affilié d'âge x est donnée par l'expression ci-dessous.

$$11{,}64\ \alpha_x^{(12)} \quad (8)$$

Examinons maintenant quel est l'engagement de l'assureur vis-à-vis de cet affilié d'âge x.

Sur λ_x affiliés d'âge x, il y en a J_x qui auront droit à une rente viagère prenant cours pendant l'année $x + 1$.

Ces J_x invalides commenceront à avoir droit à la rente à des époques qui s'échelonnent uniformément pendant toute la durée de l'année $x + 1$; globalement, on peut donc admettre qu'ils ont droit à la rente dès l'âge $x + \frac{1}{2}$.

La valeur actuelle d'une rente viagère de 1 franc reposant sur une tête d'âge $x + \frac{1}{2}$ est donnée par la formule :

$$l_{x+\frac{1}{2}} \times a_{x+\frac{1}{2}} = l_{x+\frac{3}{2}} v + l_{x+\frac{5}{2}} v^2 + l_{x+\frac{7}{2}} v^3 + \dots\dots$$

ou bien en remarquant que $l_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$

$$\left(a_{x+\frac{1}{2}}\right) = (l_{x+1} + l_{x+2}) v + (l_{x+2} + l_{x+3}) v^2 + \dots\dots$$

Si l'on multiplie les deux membres par v^x, il vient :

$$(l_x v^x + l_{x+1} v^x) a_{x+\frac{1}{2}} = l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+1} v^{x+2} + \dots\dots$$

ou bien

$$\left(D_x + \frac{D_{x+1}}{v}\right) a_{x+\frac{1}{2}} = N_x + \frac{N_{x+1}}{v}$$

En particulier, si le taux d'intérêt est de 3 °/₀, on a

$$a_{x+\frac{1}{2}} = \frac{N_x + 1.03N_{x+1}}{D_x + 1.03D_{x+1}} \quad (9)$$

D'autre part, si la rente viagère au lieu d'être servie en une fois, l'est en m fois, et à terme échu, la valeur actuelle de cette rente sera donnée par la formule :

$$a^{(m)}_{x+\frac{1}{2}} = a_{x+\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{2m}$$

et, dans le cas particulier où $m = 12$

$$a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}} = a_{x+\frac{1}{2}} + 0{,}4583$$

Remarquons maintenant que parmi λ_x valides, J_x toucheront la rente dès l'âge $x + \frac{1}{2}$, J_{x+1} dès l'âge $x + \frac{3}{2}$, et ainsi de suite ;

Par conséquent la valeur φ_x de l'engagement de l'assureur correspondant à une rente de 1 franc par an accordée à chaque invalide sera donnée par la relation

$$\varphi_x \lambda_x = \overset{(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}} J_x v^{\frac{1}{2}} + \overset{(12)}{a}_{x+\frac{3}{2}} J_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + \ldots .$$

ou bien en multipliant les deux membres de cette équation par v^x :

$$\varphi_x \lambda_x v^x = v^{\frac{1}{2}} \sum_{x=x}^{x=64} \overset{(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}} J_x v^x \quad (10)$$

Dans le cas où le taux de l'intérêt est 3 %, $v^{\frac{1}{2}} = 0{,}98533$, et l'équation (10) devient :

$$\varphi_x = \frac{0{,}98533 \sum_{x=x}^{x=64} \overset{(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}} J_x v^x}{D_x'}$$

ou bien en posant

$$0{,}98533\ \overset{(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}} J_x v^x = C_x' \quad (11)$$

et

$$\sum_{x=x}^{x=64} C_x' = M_x \quad (12)$$

on aura :

$$\varphi_x = \frac{M_x'}{D_x'} \quad (13)$$

Enfin, si l'on désigne par K_x la valeur de la rente d'invalidité à laquelle a droit un affilié effectuant des cotisations dès l'âge x, la valeur actuelle de l'engagement de la Caisse vis-à-vis de cet affilié sera $K_x\ \varphi_x$ (14).

En égalant les expressions (8) et (4), il vient :

$$K_x \varphi_x = 11{,}64\ \alpha_x^{(12)}$$

d'où

$$K_x = \frac{11{,}64\ \alpha_x^{(12)}}{\varphi_x} \quad (B)$$

Telle est la formule qui a servi à établir le tarif *(B)*.

Tableau des valeurs dont il est question dans la note B, pour des âges variant de 5 en 5 années.

x	l_x	q_x	i_x	λ_x	J_x	D'_x	N'_x	$\dot{a}_x^{(12)}$	$a_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$	M'_x	φ_x	K_x
20	6350	0,C0945	0,00019	6350,00	1,20650	3515,843	66928,858	19,4672	21,2265	4590,0003	1,30552	173,569
25	6040	0,01159	0,00038	6032,14	2,29221	2880,919	51300,423	18,2318	19,9142	4505,8736	1,56404	135,686
30	5730	0,01047	0,00076	5707,76	4,33790	2351,622	38531,169	16,8022	19,3555	4373,5376	1 85980	105,161
35	5430	0,01289	0,00152	5381,13	8,12551	1912,316	28121,660	15,1134	18,1691	4170,7904	2,18102	80,659
40	5110	0,01370	0,00305	5012,09	15,18663	1536,464	19716,425	13,2278	16,8365	3864,7482	2,51535	61,213
45	4760	0,01471	0,00609	4573,21	27,66792	1209,280	13036,409	11,1588	15,3805	3414,8242	2 82385	45,997
50	4400	0,01818	0,01218	4055,50	48,94989	925,202	7853,590	8,8425	13,7072	2781,7880	3,00668	34,233
55	3970	0,02519	0,02437	3365,97	80,98524	662,318	4024,281	6,3887	11,9772	1949,0400	2,94276	25,270
60	3450	0,03188	0,04873	2469,86	118,42979	419,241	1452,631	3,6930	10,2200	965,4791	2,30292	18,666
65	2840			1437,66		210,542	0,0000	0,0000				

Note C. — Assurance contre l'invalidité. — *Valeur K'_x de la rente acquise en cas de validité à l'âge de 65 ans, en effectuant des versements mensuels ininterrompus de 1 franc, à partir de l'âge x.*

La valeur d'une rente viagère de 1 franc, reposant sur une tête d'âge 65, lorsque la rente est payée par douzièmes et à terme échu, est

$$a_{65}^{(12)}$$

Cette valeur, rapportée au début de l'année x est :

$$a_{65}^{(12)} \frac{D'_{65}}{D'_x}$$

L'engagement de l'assureur, correspondant aux versements prévus ci-dessus, sera donc :

$$K'_x \, a_{65}^{(12)} \frac{D'_{65}}{D'_x}$$

D'autre part, l'engagement de l'affilié est $11.64\, a_x^{(12)}$, d'après la note B.

Si l'on exprime que l'engagement de l'assureur est égal à l'engagement de l'assuré, il vient :

$$11{,}64\, a_x^{(12)} = K'_x \, a_{65}^{(12)} \frac{D'_{65}}{D'_x}$$

d'où

$$K'_x = \frac{11{,}64\, a_x^{(12)} \, D'_x}{a_{65}^{(12)} \, D'_{65}}$$

Telle est la formule qui a servi à établir le tarif C.

Tableau des valeurs dont il est question dans la note C, pour des âges variant de 5 en 5 années.

$a_{65}^{(12)} = 8{,}5959$ $D_{65}' = 210{,}542$

x	$a_x^{(12)}$	D_x'	K_x'
20	19,4672	3515,843	440,21
25	18,2318	2880,919	337,82
30	168022	2351,622	254,13
35	15,1134	1912,316	185,89
40	13,2278	1536,464	130,72
45	11,1588	1209,280	86,79
50	8,8425	925,202	52,62
55	6,3887	662,318	33,00
60	8,6930	419,241	9,96
65	0	210,542	

Note D. — Assurance contre l'invalidité. — *Valeur* ${}^{x}K_y$ *de la rente d'invalidité acquise à 65 ans par un affilié effectuant dès l'âge x des versements mensuels ininterrompus de 1 franc, en supposant que la rente d'invalidité, qui ne peut prendre cours avant l'âge* y, *soit proportionnelle au nombre de versements effectués après l'âge* y.

D'après l'énoncé du problème, si l'on considère un groupe de λ_x affiliés, aucun d'eux ne touchera de rentes d'invalidité avant l'âge y, mais à partir de cet âge, il y aura :

la 1re année, J_y invalides qui toucheront une rente proportionnelle à $\frac{1}{2}$ franc

la 2e année, J_{y+1} invalides qui toucheront une rente proportionnelle à $\frac{3}{2}$ francs

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

et la $(65 - y)$e année, J_{64} invalides qui toucheront une rente proportionnelle à $64\frac{1}{2} - y$.

Si l'on désigne par φ'_y l'engagement de l'assureur correspondant aux valeurs des rentes ci-dessus, rapporté au début de ye année, φ'_y est donnée par la relation.

$$\varphi'_y \lambda_y = \frac{1}{2} a_{y+\frac{1}{2}} J_y v^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} a_{y+\frac{3}{2}} J_{y+1} v^{\frac{3}{2}} + \dots\dots$$

ou bien en multipliant les deux membres par v^y,

$$\frac{\varphi'_y D'_y}{v^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} a_{y+\frac{1}{2}} J_y v^y + \frac{3}{2} a_{y+\frac{3}{2}} J_{y+1} v^{y+1} + \dots\dots$$

et en posant

$$v^{\frac{1}{2}} a_{y+\frac{1}{2}} J_y v^y = C'_y$$

$$\varphi'_y D'_y = \frac{1}{2} C'_y + \frac{3}{2} C'_{y+1} + \frac{5}{2} C'_{y+2} + \ldots\ldots$$

ou bien encore :

$$\varphi'_y D'_y = \frac{0+1}{2} C'_y + \frac{1+2}{2} C'_{y+1} + \frac{2+3}{2} C'_{y+2} + \ldots \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2}\left[C'_y + 2C'_{y+1} + 3C'_{y+2} + \ldots\right] + \frac{1}{2}\left[C'_{y+1} + 2C'_{y+2} + 3C'_{y+3} + \ldots\right]$$

Soit
$$C'_y + 2C'_{y+1} + 3C'_{y+2} + \ldots\ldots = R_1$$

$$C'_{y+1} + 2C'_{y+2} + 3C'_{y+3} + \ldots\ldots = R_2$$

et
$$C'_y + C'_{y+1} + C'_{y+2} + \ldots\ldots = M'_y$$

La valeur de R_1 peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R_1 = C'_y + C'_{y+1} &+ C'_{y+2} + C'_{y+3} \\ + C'_{y+1} &+ C'_{y+2} + C'_{y+3} \\ &+ C'_{y+2} + C'_{y+3} \\ &+ \ldots = M'_y + M'_{y+1} + M'_{y+2} + \ldots = R'_y \end{aligned}$$

Et la valeur de R_2 peut se transformer comme suit :

$$\begin{aligned} R_2 = C'_{y+1} &+ C'_{y+2} + C'_{y+3} \\ &+ C'_{y+2} + C'_{y+3} + \\ &+ \ldots\ldots = M'_{y+1} + M'_{y+2} + \ldots = R'_y - M'_y \end{aligned}$$

L'expression (14) peut donc s'écrire :

$$\varphi'_y D'_y = R'_y - \frac{1}{2} M'_y$$

D'où
$$\varphi'_y = \frac{R'_y - \frac{1}{2}M'_y}{D'_y} \quad (15)$$

Telle est la valeur de l'engagement de l'assureur rapporté au début l'année y ; le même engagement rapporté au début de l'année x sera

$$^x\varphi'_y = \varphi'_y \times \frac{D'_y}{D'_x} = \frac{R'_y - \frac{1}{2}M'_y}{D'_x} \quad (16)$$

Si les rentes accordées dès l'âge y, au lieu de croître proportionnellement jusque la valeur $65 - y$, suivaient une proportion telle que la rente acquise à 65 ans, soit égale à 1 franc, l'engagement de l'assureur serait

$$^x\varphi_y = {^x\varphi'_y} \times \frac{1}{65 - y}$$

ou bien
$$^x\varphi_y = \frac{1}{65 - y} \, \frac{R'_y - \frac{1}{2}M'_y}{D'_x} \quad (17)$$

D'autre part, si l'on désigne par ^xK_y la rente acquise à 65 ans, par des versements mensuels ininterrompus de 1 franc, l'engagement de l'assureur sera

$$^xK_y \times \frac{1}{65 - y} \, \frac{R'_y - \frac{1}{2}M'_y}{D'_x} \quad (18).$$

L'engagement de chaque affilié est le même que celui qui a été calculé dans la note B, c'est-à-dire $11.64 \times \alpha_x^{(12)}$.

La valeur ^xK_y sera donc déterminée par l'équation

$$11{,}64\, \alpha_x^{(12)} = {^xK_y} \times {^x\varphi_y}$$

d'où
$$^xK_y = \frac{11{,}64\, \alpha_x^{(12)}}{^x\varphi_y} \quad (D)$$

Telle est la formule qui a servi à établir le tarif D.

Tableau des valeurs dont il est question dans la note D, pour des âges variant de 5 en 5 années.

y	M'_y	R'_y	D'_y	$R'_y - \frac{1}{2} M'_y$	$\frac{R'_y - \frac{1}{2} M'_y}{65 - y}$
20	4590,0003	144.222,696	3515,843	141.927,695	3153,949
25	4505,8736	121.424,825	2880,919	119.171,898	2979,297
30	4373,5376	99.137,043	2351,622	96.950,274	2770,008
35	4170,7904	77.640,556	1912,316	75.555,161	2518,505
40	3864,7482	57.349,978	1536,464	55.417,604	2216,704
45	3414,8242	38.860,725	1209,280	37.153,313	1857.666
50	2781,7880	22.973,058	925,202	21.582,164	1438,811
55	1949,0400	10.652,472	662,318	9677,952	967,795
60	965,4791	2837,565	210,542	2354,826	470,965
65					